Universidad Nacional
Federico Villarreal

Vicerrectorado de
INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

"Generalización del teorema de Lax-Milgram y un problema de condiciones de frontera lineales elípticos"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:

Sucasaire Sucasaire, Guillermo

Asesor:

Mg. CRUZ HUAYPARA, Alex A.

Jurados:

Dr. Anaya Calderón, Agustín E.

Mg. Quicaño Barrientos, Carlos G.

Mg. Contreras Tito, Vladimiro

Lima-Perú

2019

Generalización del teorema de Lax-Milgram y un problema de condiciones de frontera lineales elípticos

Guillermo Sucasaire Sucasaire

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional ”Federico Villarreal” como parte de los requisitos para obtener el titulo Profesional **de LICENCIADO EN MATEMÁTICA.**

Autor:

Guillermo Sucasaire Sucasaire

Asesor:

Mg. Alex Armando Cruz Huallpara

Dedicatoria

A mis padres: Guillermo y Lidia

A mis hermanas Sonia y Gladys

Agradecimientos

Al terminar esta etapa de mi vida, quiero expresar un profundo agradecimiento a quienes con su ayuda, apoyo y compresión me alentaron a lograr esta bella realidad. Agradezco a mi Dios por ser mi roca firme y fortaleza cada dia. Agradezco a mis padres Guillermo y Lidia, mis hermanas. quienes participaron en mi desarrollo académico y personal. Deseo también expresar mi gratitud a mi tutor Alex Armando Cruz Huallpara por su apoyo y consejo para analizar tan preciada meta. Mil gracias a mis compañeros de carrera; por su apoyo y comprensión

Índice

Indice de figuras

Resumen

El propósito de esta investigación fue aplicar la generalización del teorema de Lax-Milgram en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos.

La investigación fue del tipo básico, con un enfoque cuantitativo, el diseño aplicado fue no experimental y explicativo. Se recopiló la información mediante libros, tesis, trabajos virtuales y monografías para luego estudiar la información y sintetizarlo para la obtención de los resultados de trabajo de investigación.

De acuerdo a los resultados obtenidos se verifico que la aplicación de la generalización del teorema de Lax-Milgram es una herramienta muy útil que garantiza la existencia y unicidad de la solución en problemas de condiciones de frontera lineales elíptico, además se aplico el teorema en el problema del contorno para la ecuación del calor usando el algoritmo de FreFrem++ luego de obtener la forma bilineal se verifico las condiciones de continuidad y la coercividad para luego garantizar la existencia y unicidad de la solución.

Palabras claves: Problemas de condiciones de frontera, Teorema de Lax-Milgram, problema variacional, métodos finitos.

Abstract

The purpose of this investigation was to apply the generalization of the Lax-Milgram theorem in solving problems of elliptic linear boundary conditions.

The research was of the basic type, with a quantitative approach, the applied design was not experimental and explanatory. The information was collected through books, theses, virtual works and monographs to then study the information and synthesize it. for obtaining the results of research work.

According to the results obtained, it is verified that the application of the generalization of the Lax-Milgram theorem is a very useful tool that guarantees the existence and uniqueness of the solution in problems of elliptic linear boundary conditions, besides applying the theorem in the problem of the contour for Heat equation using the FreFrem ++ algorithm after obtaining the bilinear form verifies the conditions of continuity and coercivity to then guarantee the existence and uniqueness of the solution.

Key words: Boundary conditions problems, Lax-Milgram theorem, variational problem, finite methods.

I. Introdución

La generalización del teorema de Lax-Milgram es una variante del Teorema de Representación de Riez , el cual se ha convertido en una herramienta indispensable al estudio del buen comportamiento de las formulaciones variacionales de varios problemas de valor de contorno lineales elípticos. Por tal razón se debe dedicar al- gún tiempo al estudio de este teorema y algunas propiedades mas importantes.

El objeto de esta tesis es aplicar la Generalización del Teorema de Lax-Milgram en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos. Además esta tesis, pretende presentar de forma precisa las demostraciones claras de todos los principales resultados sin pretender escribir un libro completo sobre el tema.

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, la aparición del Teorema de Lax-Milgram se da en un contexto temporal en el que comenzaba el interés por formular problemas en espacios abstractos, que pudieran capturar sus propiedades y facilitaran su planteamiento y resolución. Las carácterísticas intrínsecas que po- seían espacios como los de Banach, Hilbert y Sobolev, todos ellos recientemente desarrollados, los hicieron candidatos idóneos para esto. Lax y Milgram formaron parte de este período de ebullición, contribuyendo con un resultado de existencia y unicidad que sustentaría una parte importante de esta teoría.
De esta manera, el Teorema de Lax-Milgram resultó ser de gran ayuda en la formulación de problemas con soluciones débiles, problemas variacionales y para verificar el buen planteamiento de problemas por aproximación con el método de Galerkin.

Sin embargo, el impacto mayor de dicho teorema no se dio por sus aplicaciones directas, sino por la teoría, métodos y generalizaciones desarrollados a partir de éste, que tuvieron y siguen teniendo- una amplitud aún mucho mayor.

En el capitulo II presentamos los conceptos fundamentales tales como espacios lineales, complemento ortogonal, funcionales lineales y la teoria de la medida, luego presentamos la desigualdad de Holder y de Minkowski, ademas la desigualdad de Young que es una herramienta fundamental para la demostración de las desigualdades de Holder y de Minkowski, presentamos el Espacio de Disribuciones, una pequeña reseña histórica de la función Delta de Dirac, la derivada de una distribución y ejemplos aplicativos, luego presentamos los espacios de Sobolev, formas bilineales y el teorema de rango cerrado, luego presentamos la demostración de la Generalización del teorema de Lax-Milgram, luego presentamos las aplicaciones del teorema del teorema de Lax-Milgram generalizado en 1D y 2D y por ultimo presentamos las conclusiones y resultados principales. Además el siguiente diagrama ilustra un panorama general de los distintos espacios a conocer y la importancia que ello nos puede dar.

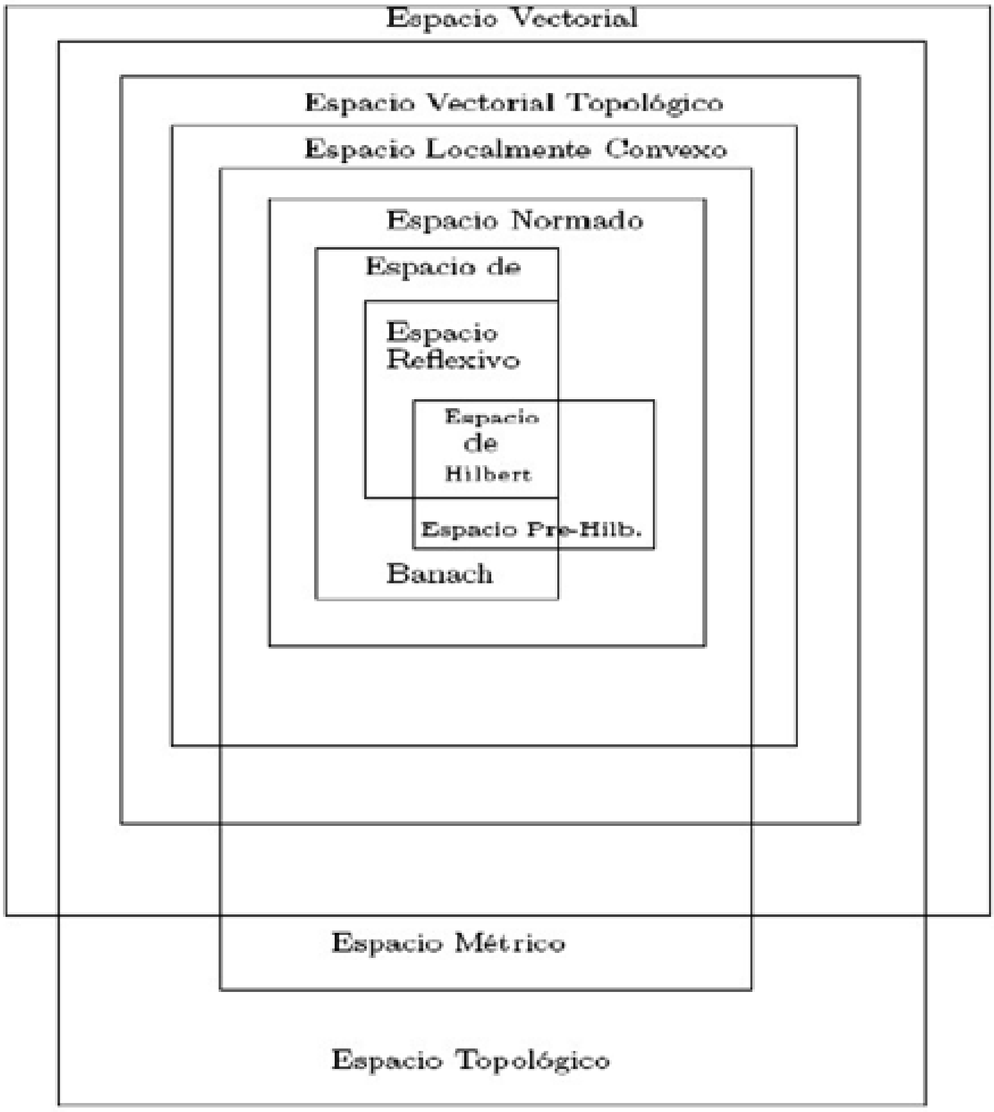

Figura 1: Espacios Fundamentales (Ortiz, 2010).

1.1 Descripcion y formulacion del problema.

1.1.1 Descripcion del problema

Las formulaciones variacionales de problemas de valor de contorno lineales elipticos, describen en mayor densidad los fenomenos de la naturaleza, por ello el problema radica en analizar primero la existencia y unicidad de las soluciones, antes de empezar a resolver el problema variacional, por tal razon surge la genenalizacion del teorema de Lax-Milgram, el cual cumpliendo ciertas condiciones el teorema asegura la existencia y unicidad de las soluciones, se propone por tanto analizar, demostrar y aplicar la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la soluciones de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos.

1.1.2 Formulacion del problema

Problema General

- ¿Cuál es la aplicación de la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos?

Problema Especifico

- ¿Cuáles son los principales topicos afines de la generelizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos?
- ¿Cuál es el analisis de las condiciones que deben de cumplirse en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos de la generalizacion del teorema de Lax-Milgram?
- ¿Cuál es la demostracion de la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos?

1.2 Antecedentes

El Teorema de Lax-Milgram ha sido, desde su formulación en 1954, una piedra angular en el estudio del análisis funcional. Propuesto por los matemáticos Peter D. Lax y Arthur N. Milgram como una herramienta util a la teoria de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales lineales del tipo eliptico, este teorema tuvo repercusión en este la matemática aplicada como en el estudio teórico del análisis funcional.

Las carácterísticas intrínsecas que poseían espacios como los de Banach, Hilbert y Sobolev, todos ellos recientemente desarrollados, los hicieron candidatos idóneos para esto. Lax y Milgram formaron parte de este período de ebullición, contribuyendo con un resultado de existencia y unicidad que sustentaría una parte importante de esta teoría.

De esta manera, el Teorema de Lax-Milgram resultó ser de gran ayuda en la formulación de problemas con soluciones débiles, problemas variacionales y para verificar el buen planteamiento de problemas para aproximación con métodos de Galerkin. Sin embargo, el impacto mayor de dicho teorema no se dio por sus aplicaciones directas, sino por la teoría, métodos y generalizaciones desarrollados a partir de éste.

Gil (2016) en su investigacion titulada *El teorema de Lax-Milgram y una aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales,* realizo un estudio del tipo básica y con un enfoque cualitativo. Una de las conclusiones indica que se pudo comprobar que el Teorema de Lax-Milgram tiene aplicación, pues a pesar de ser un teorema proveniente de la consecuencia del Análisis funcional, su aplicación a las ecuaciones diferenciales facilitan hallar una única solución a estas, sin embargo de igual forma generaliza el Teorema de Representación de Riesz a cualquier forma sesquilineal.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Aplicar la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos

1.3.2 Objetivo Especifico

- Presentar los principales topicos afines de la generelizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos
- Analizar las condiciones que deben de cumplirse en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos de la generalizacion del teorema de Lax-Milgram
- Demostrar la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos

1.4 Justificacion

La importancia de la Generalizacion del teorema de Lax-Milgram radica en que es una herramienta sencilla y eficaz, utilizado principalmente para asegurar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de tipo elipticas, y en menor medida del tipo parabolico.

1.4.1 Justificacion teorica

Las conclusiones y recomendaciones podran ser utilzados por docentes o alumnos en investigaciones futuras.

1.4.2 Justificacion Practica

Este trabajo de investigacion podra ser utilizado por docentes y alumnos que deseen ahondar en temas relacionados con la generalizacion del teorema de Lax-Milgram , para iniciar ya sea un tema de investigacion nuevo o para ver ciertos aspectos del analisis funcinal que ayudarian en su estudio.

1.4.3 Justificacion Metodologica

Al ser un trabajo de investigacion que se enfoca en la adquisicion de informacion mediante libros, tesis o libros virtuales, las referencias serviran para otros trabajos de investigacion asociados con el tema.

II. Marco Teorico

2.1 Algunos conceptos

2.1.1 Espacios lineales y Aplicaciones en Espacios Vectoriales

Sea E un espacio lineal sobre el campo de los números reales o complejos. Por lo general, siempre se tratará con espacios lineales reales. El espacio E es de dimensión n, si el número máximo de vectores linealmente independientes que existen en él es n. En cambio, si en E se puede encontrar cualquier número finito de elementos linealmente independientes, se dice que es de dimensión infinita.

El espacio $C[a,b]$ es el conjunto de todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$. Se denota por $C^n[a,b]$, al conjunto de todas las funciones reales que poseen derivadas continuas hasta el orden n en $[a,b]$.

Definición 1. Según Yosida (1980) mencionó lo siguiente:

> Sea X un espacio vectorial sobre R. El funcional $p : X \to [0,\infty)$ definido sobre el espacio vectorial X, es llamado funcional sublineal o funcional convexo si cumple:
>
> $p(\alpha x) = \alpha p(x)$,$\alpha \in \mathbb{R}$ (homogenea positiva)
>
> $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (inecuación triangular o subaditiva)
>
> Además si p satisface que: $\forall x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$: $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, p es llamado semi-norma. (p.22)

Además una seminorma es llamada norma si satisface también lo siguiente: Si $p(x) = 0$ entonces x = 0.

Veamos la defición que usualmente es utilizada y representada en el estudio del analisis funcional.

Definición 2. Según Clapp (2010) mencionó lo siguiente: “Sea X un espacio vectorial. Se llama norma a una aplicación $||.|| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\forall x \in X,\ x \neq 0$ se tiene $||x|| > 0$ y $||x|| = 0$si y solo si x=0

2. $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$

3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ para $x, y \in X$

Al par $(X, ||.||)$ se le llama espacio vectorial normado (EVN)” (p.11).

Definición 3. Según Clapp (2010) mencionó lo siguiente: “Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X, se dice que es convergente al punto x y se escribe $x_n \longrightarrow x$, cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x|| < \epsilon$, si cumple que $n > N$ “ (p.41).

Definición 4. Según Clapp (2010) mencionó lo siguiente: “Sea $(X, ||.||)$ un Espacio Vectorial Normado. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de cauchy, cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_m|| < \epsilon$, si cumple que $n, m > N$ “ (p.71).

Definición 5. Según Clapp (2010) menciono lo siguiente: “Un Espacio Vectorial Normado X es completo si toda sucesión de cauchy en X es convergente en X ” (p.74).

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}$ son espacios completos.

Definición 6. Según Clapp (2010) mencionó lo siguiente: “Sea X un Espacio Vectorial Normado, X es llamado Espacio de Banach (EB) si X es completo” (p.74).

Definición 7. Según Yosida (1980) mencionó lo siguiente: “Sea X un espacio vectorial. Un producto interno en X es una aplicación $\langle , \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \in X,\ \langle x, x \rangle = 0$ si y solo si x = 0

2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in X$

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in X;\ \alpha \in \mathbb{R}$

4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, para todo $x, y \in X$ " (p.40).

Al par $(X, \langle , \rangle)$ se le llama Espacio con Producto Interno (EPI).

Lema 1. Sea E un espacio con producto interno. Entonces la función $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ con $u \in E$, es una norma en E.

Definición 8 (Espacio de Hilbert). Según Chamorro (2010) mencionó lo siguiente: "Sea $(X, \langle , \rangle)$ un Espacio con Producto Interno. Si X con la norma $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ es completo, entonces $(X, \langle , \rangle)$ se llama un espacio de Hilbert (EH)" (p.115).

Lema 2. Sea V un espacio real normado. Si la norma $||.||$ satisface la regla del paralelogramo

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2, \quad \forall x, y \in V$$

entonces ésta induce un producto interno en V. Este producto interno es definido por la relación

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 + ||x-y||^2)$$

Demostración: Ver la demostración en Solin [25]

Proposición 1. Sea un subespacio $Y \subset X$, donde X es un Espacio de Banach. Entonces Y es completo sii Y es cerrado en X

Demostración:

$\Rightarrow)$ Sea $x \in \overline{Y}$ entonces $\exists$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente entonces es de Cauchy y como Y es completo toda sucesión de cauchy converge en Y, asi $x \in Y$

.

$(\Leftarrow$ Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en Y, ahora como X es completo entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en X, es decir, $\exists\ x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$, entonces $x \in \overline{Y}$, pero como Y es cerrado entonces x ∈ Y

Luego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge en Y, por tanto Y es completo.

Corolario 1. Sea X un Espacio Vectorial Normado y sea $Y \subset X$un subespacio. Entonces si Y es cerrado y X es de Banach entonces Y es de Banach.

Demostración:

Sabemos por la proposición anterior que si Y es cerrado en X entonces Y es completo y además como Y es subespacio de X hereda la estructura del espacio vectorial de X entonces Y es un EVN. Por tanto Y es de Banach.

2.1.2 Complementos ortogonales en Espacios de Hilbert

Sea U un espacio vectorial con producto interno y V un subespacio de U; se define el complemento ortogonal de V como el conjunto.

$$V^{\perp} = \{u \in U; \langle u, v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}$$

esto es, $V^{\perp}$ consiste de todos los elementos de U que son ortogonales a todo elemento de V. Si w pertenece a $V^{\perp}$, se dice que w es ortogonal a V y se escribe $w \perp V$.

Observación 1. Puesto que $\langle v, v\rangle = 0$ implica que v = 0, está claro que el único miembro tanto de V y $V^{\perp}$ es el elemento cero: $V \cap V^{\perp} = \{0\}$.

Teorema 1. Sea V un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces cada $u \in H$ se puede escribir únicamente en la forma

$$u = v + w, \;\; v \in V, \;\; w \in V^{\perp}$$

esto es, $H = V \oplus V^{\perp}$

Demostración: Ver la demostración en Yosida [29]

2.1.3 Operadores en espacios lineales normados

Definición 9. Sean dos espacios vectoriales y en particular espacios normados X e Y; la aplicación $T : X \to Y$ es llamado ”operador”.

Definición 10 (Operador lineal). Según Gil (2017, p.9) mencionó lo siguiente: “Un operador lineal es un operador tal que:

1. El D(T) de T es un espacio vectorial y el rango R(T) está en el espacio vectorial sobre el mismo campo.

2. $\forall x, y \in D(T)$ y escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $T(x + y) = Tx + Ty$
- $T(\alpha x) = \alpha Tx$ ”

Observación 2.

- Denotaremos Tx en vez de T (x), pues es una notación estandar usada en el análisis funcional.
- D(T) denota el dominio de T.
- $R(T) = \{v \in Y; T(u) = v$ para algún $u \in X\}$ es llamado el rango o imagen de T.
- $N(T) = \{u \in X : Tu = 0\}$ es llamado nucleo o kernel de T, además N (T) es un subespacio cerrado de X.

Ejemplo 2.

- Un operador lineal $T : C[a, b] \to C[a, b]$ puede ser definido por

$$Tx(t) = \int_a^b x(t)\, dx; t \in [a, b]$$

- El operador identidad $I_X : X \to X$ está definido por $I_X(x) = x \; \forall x \in X$

Teorema 2. Sea $T : E \to F$ un operador. T es inyectivo si y solo si $N(T) = \{0\}$.

Demostración:

Sea $x \in N(T)$ entonces se tiene que: $T(x) = T(0) \to$ x=0, por lo tanto N(T) ={0}. Si tenemos que T (x) = T (y) y como como T en lineal entonces $x-y \in N(T)=\{0\}$ entonces x=y, por lo tanto T es inyectivo.

Definición 11. Según Brezis (1983, p.26) mencionó lo siguiente:

"Un operador $T : E \to F$ es acotado, si existe una constante M > 0 tal que para cualquier x ∈ E se cumple que:

$$||Tx||_F \leq M||x||_E$$"

Definición 12. Según Yosida (1980, p.110) mencionó lo siguiente: "Sean $(X, ||.||_X)$ y $(Y, ||.||_Y)$, Espacios Vectoriales Normados, se define:

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{T : X \to Y/T \text{ es lineal y acotado } \}$$

Además $\mathscr{L}(X,Y)$ es llamado espacio de operadores lineales y acotados". De igual forma Yosida (1980, p.43) indico que: "El espacio $\mathscr{L}(X,Y)$ puede ser dotado de una norma definida por:

$$||T|| = ||T||_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||_Y, \; con \; T \in \mathscr{L}(X,Y)$$

Y se verifica que:

$$||T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||_Y = \sup_{||x||=1} ||Tx||_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X}$$"

Definición 13. Según Miana (2006, p.24) menciono lo siguiente: "Sea X un Espacio Vectorial Normado sobre $\mathbb{K}$. El espacio dual de X es el espacio de banach $\mathscr{L}(X,\mathbb{K})$, denotado por X^*, los elementos de X^* son llamados funcionales lineales acotados sobre X; así $X^* = \mathscr{L}(X,\mathbb{K})$".

Ejemplo 3. Uno de los ejemplos clásicos es el siguiente:

$(\ell^p)^* = \ell^q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 < p < \infty$.

Donde $1 \leq p < \infty$.

Observación 3. La expresión ℓ^p es el espacio cerrado de sucesiones $\mathbb{R}^N$ defínido de la siguiente manera:

$$\ell^p = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

donde $1 \leq p < \infty$.

Definición 14. Según Yosida (1980, p.196) mencionó lo siguiente: "Sean H y G dos espacios de Hilbert cuyos productos escalares son denotados indistintamente $\langle , \rangle$, y sea $T \in \mathscr{L}(H, G)$. Se llama operador adjunto (conjugado) de T al único operador $T^* \in \mathscr{L}(G, H)$ que verifica:

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle, \forall u \in H, \forall v \in G"$$

Observación 4. Si H = G y $T = T^*$, se dice que T es autoadjunto (simétrico).

Ejemplo 4. Sea el operador A una matriz de orden m×n, $A = (a_{ij}), i = 1, 2, ..., m$ $j = 1, 2, ..., n$ y sean $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ dos vectores. Entonces el producto escalar:

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j) = \langle x, A^* y \rangle$$

de aquí se deduce que el operador conjugado de la matriz A es la matriz transpuesta $A^* = (a_{ji})$.

El operador A que actúa en el espacio de Hilbert H se llama positivo (A > 0) si $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todos los $x \in H$, excepto x = 0. El operador A es no negativo $(A \geq 0)$, si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todos los x ∈ H.

2.1.4 Funcionales lineales

Un funcional lineal (o forma lineal) es un caso particular de un operador lineal, es decir, es un operador lineal que transforma el espacio E en valores de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Proposición 2. Sea X un Espacio Vectorial Normado y f un funcional lineal en X. Entonces f es continuo si y solo si N(f) es cerrado

Demostración:

- La prueba de que N(f) es cerrado es directa
- Supongamos N = N (f) es cerrado. Si N = X entonces f = 0 y es continuo.

Si $N \neq X$ existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$. Sea $x_0 = \frac{x_1}{f(x_1)}$. Como $f(x_0) = 1$ y N es cerrado N es cerrado entonces $d(x_0, N) = d > 0$ porque $x_0 \notin N$.

Por otra parte para todo $x \in X$, $x = x - f(x).x_0 + f(x).x_0$, donde $x - f(x)x_0 \in N$.

Esto implica que $X = N \oplus \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Si escribimos entonces $x = n + \lambda x_0$ con $n \in N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ resulta:

$$||x|| = |\lambda|.||x_0 + \frac{n}{\lambda}|| \geq |\lambda|.||x_0 - \frac{n}{\lambda}|| \geq |\lambda| \text{ínf} ||x_0 - \frac{n}{\lambda}|| = |\lambda| d =$$

$$|f(\lambda x_0 + n)|d = |f(x)|d$$

esto implica que $|f(x)| \leq \frac{1}{d}||x||$ y asi f es continuo.

Teorema 3 (Teorema de Representación de Riesz). Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo de H^*. Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que:

$$F(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Ademas $||F||_{H^*} = ||u||_H$.

Demostración:

-La unicidad:

Supongamos que existe u,w de H tal que $F(v) = \langle w, v \rangle$ para todo v de H; luego por la linealidad del producto interno se tiene:

$\langle v, u - w \rangle = 0$ para todo v de H

Tomando v = u − w se tiene que u = w.

-La existencia:

Si el espacio nulo N (F) = H, entonces F es el funcional lineal cero y se pue de definir u = 0. Si $N(F) \neq H$ entonces existe un v_0 de H tal que $F(v_0) \neq 0$.

Ya que N(F) es un espacio cerrado de H, es posible escribir H como la suma directa $H = N(F) + N(F)^{\perp}$. Así el elemento v_0 se puede descomponer en la suma de $v_0 = v_1 + v_2$ tal que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ donde $v_1 \in N(F), v_2 \in N(F)^{\perp}$.

En particular si $F(v_2) \neq 0$ para $z = vF(v_2) - F(v)v_2$ se cumple lo siguiente:

$F(z) = F(v)F(v_2) - F(v)F(v_2) = 0$ para todo $v \in H$

Asi $z \in N(F)$ para todo $v \in H$. Ahora ya que $v_2 \in N(F)^{\perp}$ se tiene que:

$$(v_2, z) = (v_2, vF(v_2) - |F(v)v_2) = F(v_2)(v_2, v) - F(v)(v_2, v_2) = 0$$

lo que implica que:

$F(v) = F(v_2)\dfrac{(v_2, v)}{||v_2||^2} = (\dfrac{F(v_2)v_2}{||v_2||^2}, v)$ para todo v en H

Sea $u = \dfrac{F(v_2)v_2}{||v_2||^2}$ de H se tiene que $F(v) = (u, v)$

y si v=u se tiene $|F(u)| = |(u, u)|$ entonces $|F(u)| = ||u||^2$.

Queda por demostrar que $||F||_{H'} = ||u||_H$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$||F|| = \sup_{v \neq 0} \frac{|F(v)|}{||v||} = \sup_{v \neq 0} \frac{(u, v)}{||v||} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{||u||||v||}{||v||} = ||u||$$

Ademas

$$||F(u)||^2 = |(u, v)| = ||u||^2 \leq ||F||||u|| \text{ o } ||F|| = \sup \frac{F(v)}{||v||} \geq \frac{F(v)}{||v||} = \overset{\text{para } v=u}{\rightarrow} =$$

$$\frac{|F(u)|}{||v||} = \frac{f(u)}{||u||} = ||u||$$

Asi $||F|| \geq ||u||$

Por lo tanto $||F||_{H'} = ||u||_H$.

Definición 15. Según Gatica (2012, p.75) mencionó lo siguiente: "Sean E y F espacios normados y sea $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Se define el operador adjunto $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ como el único que cumple la siguiente fórmula:

$$\langle Tx, \varphi \rangle = \langle x, T^*\varphi \rangle \, ; \forall x \in E, \varphi \in F^*$$

una forma mas explícita seria que $T^*(\varphi) = \varphi \circ T \in E^*$, $\forall \varphi \in F^*$".

Definición 16 (General de Anulador-Preanulador). Según Gatica (1983, p.81) mencionó lo siguiente: "Sea E un Espacio Normado. Dados $S \subseteq E$, $\mathcal{T} \subseteq E^*$, definamos:

1. El anulador S° de S como el subespacio de funcionales que anulan a S:

$$S^\circ = \{\varphi \in E^* / \varphi|_S \equiv 0\} = \{\varphi \in E^* / S \subseteq Ker\varphi\} \sqsubseteq E^*$$

2. El preanulador ${}^\circ\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}$ como los $x \in E$ anulados por las funcionales de $\mathcal{T}$:

$${}^\circ\mathcal{T} = \{x \in E / \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{T}\} = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{T}} Ker\varphi \sqsubseteq E$$"

Observación 5.

- $S \sqsubseteq E$ significa que S es un subespacio cerrado de E
- Cuando $f \in E^*$ y $x \in E$ se denota generalmente $\langle f, x \rangle$ en lugar de f (x), se dice que $\langle , \rangle$, es el producto escalar en la dualidad E^*, E

$$\langle f, x \rangle \overset{\text{not}}{=} f(x)$$

Definición 17. Dado cualquier $A \subseteq E$, notaremos span{A} al subespacio generado por A:

$$span\{A\} \overset{\text{def}}{=} \bigcap \{S \subseteq E / A \subset S, S : \textit{ subespacio de } E\}$$

Definición 18 (Usual). Según Gatica (1983, p.81) mencionó lo siguiente: "Sea X un Espacio de Banach. Dados $M \subset X$ y $N \subset X^*$, definamos :

$$M^\circ = \{f \in X^* / \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M\} = \{f \in X^* / f(x) = 0, \forall x \in M\}$$

$${}^\circ N = \{x \in X / \langle g, x \rangle = 0, \forall g \in N\} = \{x \in X / g(x) = 0, \forall g \in N\}$$

Ademas M ◦ y ◦ N son tambien llamados aniquiladores o anuladores”.

Proposición 3. Sea $M \subset X, X$ es Espacio de Banach, con $M^{\circ} = \{f : X \to \mathbb{R} / f(x) = 0, \forall x \in M\}$. Entonces M° es cerrado

Demostración:

Sea $f \in \overline{M^{\circ}}$, $\exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M^{\circ}$ tal que $f_n \to f$, es decir $||f_n - f|| \to 0$. Como $f_n \in M^{\circ}$, $f_n(x) = 0, \forall x \in M$. Además $|f_n(x) - f(x)| = |(f_n - f)(x)| \leq ||f_n - f||||x|| \to 0$ (pues $||f_n - f|| \to 0$), es decir, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Luego obtenemos que $f(x) = 0$,$\forall x \in M$ entonces $f \in M^{\circ}$.

Teorema 4 (Hahn-Banach generalizado). Sea X un Espacio Vectorial sobre K $(\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C})$,Y es un subespacio lineal de X (o subespacio vectorial) y p es una seminorma sobre X. Si f es un funcional lineal sobre Y tal que :

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in Y$$

Entonces existe un funcional lineal F sobre X tal que :

$F|_Y = f$ (i.e. F es una extensión lineal de f)

y $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$.

Demostración: Ver la demostración en Gonzales [16]

Lema 3 (Lema de Mazur). Sea X un Espacio Vectorial Normado, $Y \subset X$ subespacio $w \in X \setminus Y$.

Supongamos:

$$d = dis(w, Y) = \inf_{y\in Y} ||w - y||_X > 0$$

Entonces existe $f : X \to \mathbb{R}$ funcional lineal acotado talque $f(w) = d$ y $f(y) = 0\ \forall y \in Y$

Demostración: Ver la demostracion en Breziz [4]

Observación 6. Sean A y B dos subconjuntos de X, entonces se tiene que

$A \setminus B = \{x/x \in A, x \notin B\}$, en particular $A^c = X \setminus A$.

Corolario 2. Sea X un Espacio Vectorial Normado y x0 = 0 el elemento nulo de X. Entonces $\exists\ f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$ y $f(x_0) = x_0$.

Demostración:

Usando el Lema de Mazur para $Y = \{0\}$.

Definición 19. Según Treves (1967, p.372) menciono lo siguiente: “Sea X^* el espacio dual de X. Se define el bidual de X como $X^{**} \overset{\text{def}}{=} (X^*)^*$”.

Observación 7. Sea X un Espacio de Banach y F el cuerpo sobre el cual está definido X, sea X^* su dual y sea X^{**} su bidual con sus respectivas normas definidas por:

$||T|| = \sup_{\substack{x \in X \\ ||x|| \leq 1}} |Tx|$ y $||\varphi|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f|| < 1}} |\varphi(f)|$

Se tiene una inyección canónica definida:

$$\begin{aligned} J = J_X : \quad & X \to X^{**} \\ & x \mapsto J_X(x) = \quad J_x \quad \in X^{**} \\ & \qquad\qquad\qquad J_x : \quad X^* \to \mathbb{F} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi \mapsto J_x(\varphi) = \varphi(x), \forall \varphi \in E^* \end{aligned}$$

Es decir hacemos actuar X en el espacio X^* via "ser evaluado en".

Claramente J es lineal y una isometria , es decir , $||J_x||_{X^{**}} = ||x||_X, \forall x \in X$

$$||J_X|| = \sup_{||f|| \leq 1} |J_x(f)| = \sup_{||f|| \leq 1} |f(x)| = ||x||$$

Definición 20. Un espacio normado X es reflexivo cuando la aplicación J es sobreyectiva. En este caso X y X^{**} son isométricos.

Ejemplo 5. Si $1 < p < \infty$, ℓ^p es reflexivo. Pues $(\ell^p)^{**}$ es isomorfo a ℓ^p; se verifica que la composición del isomorfismo natural de ℓ^p en $(\ell^p)^*$ es un isomorfismo natural de $(\ell^p)^*$ en $(\ell^p)^{**}$, lo cual da lugar a la imersión de ℓ^p en $(\ell^p)^{**}$.

Proposición 4. Si X es reflexivo entonces X es de Banach.

Demostración:

Sabemos que X^{**} es de Banach y como X es isométrico con X^{**} entonces X es tambien de Banach.

Teorema 5 (Teorema de la Aplicación Abierta). Sea X e Y Espacio de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado y sobreyectiva. Entonces T es una aplicación abierta, es decir, T lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Demostración: Ver la demostración en Miana [21]

2.1.5 Teoria de la medida

Así como la topología nos permite hablar de límites y de continuidad utilizando el lenguaje de la teoría de conjuntos, la teoría de la medida nos permitirá definir los conjuntos medibles y las funciones medibles utilizando este mismo lenguaje. Más precisamente, el objetivo que nos proponemos aquí es el de construir, gracias a este formalismo, un criterio que determine qué conjuntos o qué funciones son medibles y qué valor numérico asignar a estas medidas.

Definición 21 (Función aditiva de conjuntos). Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X. Una función positiva aditiva de conjuntos sobre $(X, \mathcal{A})$ es una aplicación

$$m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

en el cual se cumple las siguientes propiedades

1. $m(\phi) = 0$

2. para todo A y B en $\mathcal{A}$ se tiene si:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Se dira además que m es finita si, $m(X) < +\infty$.

Generalizaremos la noción de álgebra con la definición siguiente.

Definición 22 (σ_algebra). Según Chamorro (2010, p.58) mencionó lo siguiente:

Una σ_algebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto X es un álgebra definida sobre X. Entonces $\mathcal{A}$ ⊂ P(X) es un σ_algebra si se verifica lo siguiente:

1. Si φ y X pertenecen a $\mathcal{A}$

2. Si A ∈ $\mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$

3. Para toda familia numerable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene:

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Un conjunto X dotado de una σ_algebra $\mathcal{A}$ será llamado espacio medible y será denotado por $(X, \mathcal{A})$. Los elementos de la σ_algebra $\mathcal{A}$ serán denominados conjuntos $\mathcal{A}$- medibles.

Observación 8. La reunión de una familia de σ_algebras no es en general una σ_algebra. Consideremos X un conjunto con $A, B \subset X$ subconjuntos, y se definen las dos σ_algebras $\mathcal{A}_1 = \{\phi, A, A^c, X\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ se observa claramente que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ no es un σ_algebra.

2.1.5.1. Medida sobre σ_algebra

Definición 23 (Medida). Según Chamorro (2010, p.66) mencionó lo siguiente

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida sobre $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que cumple:

1. $\mu(\phi) = 0$

2. Para toda sucesión de elementos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Esta propiedad se llama σ − aditividad de μ.

La tripleta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina espacio medido; sea un elemento $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(A)$ sera llamado la μ − medida de $\mathcal{A}$.

Ejemplo 6 (Medida de conteo). Es la medida determinada por:

$$\begin{array}{llll} \mu: & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \mapsto & \mu(A) = \begin{cases} Card(A) & : si \qquad Card(A) < +\infty \\ +\infty & : si\, no \end{cases} \end{array}$$

Esta medida es la medida natural sobre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

Ejemplo 7 (Medida gruesa). Según Chamorro (2010) mencionó lo siguiente: "Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, la medida gruesa es la asigna a cada conjunto no vacio de $\mathcal{A}$ el valor de $+\infty$. Esta medida no tiene otra ventaja que la de servir para la construcción eventual de contra ejemplos simples" (p.67).

2.1.6 Diferencias Finitas

Sea una función f = f (x), definimos el operador:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

que se denomina el operador hacia adelante de primer orden, y definimos de forma analoga el operador hacia atras de primer orden como:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x - h)$$

Ejemplo 8. Veamos los siguientes ejemplos:

- Si f(x)= x entonces $\Delta f(x) = h$
- Si f(x)= sen(x) entonces $\Delta f(x) = 2cos(x + \frac{h}{2}).sen(\frac{h}{2})$
- Si f(x)= cos(x) entonces $\Delta f(x) = -2sen(x + \frac{h}{2}).sen(\frac{h}{2})$

Veamos ahora la aproximación de la "primera derivada" definida por diferencias finitas; tres son las definiciones los cuales se enumeran a continuación.

2.1.6.1 Diferencias Finitas a izquierda

Definimos la diferencia finita por la izquierda como:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-h}}{\Delta x}$$

2.1.6.2 Diferencias Finitas a derecha

Definimos la diferencia finita por la derecha como:

$$f_i' = \frac{f_{i+h} - f_i}{\Delta x}$$

2.1.6.3 Diferencias Finitas centradas

Definimos la diferencia finita centrada como:

$$f_i' = \frac{f_{i+h} - f_{i-h}}{2\Delta x}$$

Donde denotaremos que $f_{i-h} = f(x-h)$, $f_i = f(x)$, $f_{i+h} = f(x+h)$.

2.1.6.4. Diferencias Finitas para la derivada parcial

Ya se vio la derivada por diferencias de una función real de una variable, ahora veremos como se define la derivada parcial de una función de dos variables por diferencias finitas a izquierda.

Definición 24. Sea una función $u = u(x,y)$, la aproximación de la deriva parcial mediante diferencias finitas a izquierda se define como:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-h,j}}{h}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-h}}{h}$$

2.2 Espacios Lp(Ω)

En este apartado se presenta y analiza los espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p el cual definiremos en base al funcional $||.||_{L^p}$, la definición de esta funcional esta dada de la siguiente forma (X, A, μ) un espacio de medida y para $f : X \to \mathbb{K}$ una función medible escribimos

$||f||_{L^p} = (\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$ con $1 < p < \infty$; ademas de las desigualdades de Holder y Minkowski el cual será utilizado en los siguientes capítulos, antes de ello presentamos algunas deficiones y "herramientas"que necesitaremos para entender estos espacios, acontinuación veamos la siguiente definición.

Definición 25. Según Chamorro (2010, p.136) mencionó lo siguiente:

> Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Decimos que una propiedad P(x) que depende de un punto x ∈ X es válida μ-casi en todas partes (abreviamos μ- c.t.p. o simplemente c.t.p.) o como en otros textos, P (x) satisface casi dondequiera (abreviandose c.d.) si el conjunto de los x ∈ X en donde esta propiedad no esta verificada es un conjunto de μ − medida nula.

Ademas Chamorro (2010) indico que: “Por ejemplo, para una función f definida sobre un espacio medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a valores reales, escribimos f (x) = 0 μ-c.t.p. si el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tiene μ − medida nula; es decir si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.” (p.136).

Observación 9. Cuando la integral de Riemann y de Lebesgue coinciden, para aclarar este detalle tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6. Sean [a, b] intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y f una función acotada definida en [a, b] que toma valores reales. Entonces:

1. La función f es Riemann-integrable si y solo si es continua en casi todo punto
de [a,b].

2. Si la función f es Riemann-integrable entonces es Lebesgue-integrable y sus
dos integrales coinciden.

Demostración: Ver la demostración en Chamorro [6]

Definición 26. Según Chamorro (2010) menciono lo siguiente: "Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. La clase de equivalencia de f con respecto a R_μ es el conjunto determinado por:

$$\{g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) : f R_\mu g\}$$

Un elemento de esta clase de equivalencia es denotado por [f]".

Definición 27 (Espacio $\mathcal{L}^p$). Según Chamorro (2010) mencionó lo siguiente:

> Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $0 < p < \infty$ un parámetro real. El espacio de Lebesgue $\mathcal{L}^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ esta definido como el conjunto de funciones medibles $f : X \to \mathbb{K}$ cuyo módulo a la potencia p-ésima es integrable; es decir:
>
> $$\mathcal{L}^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} : ||f||_{L^p} < +\infty\}$$
>
> Donde $||f||_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$, notaremos con espacios $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ o $\mathcal{L}(X)$ al conjunto $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ cuando no hay confusión (p.218).

Definición 28 (Espacios L^p). Según Chamorro (2010, p.224) mencionó lo siguiente: "Sea $0 < p < \infty$ un índice real. El espacio de Lebesgue $L^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ denotado por $L^P(X, \mu)$ o $L^P(X)$ o L^P si no hay confusión, esta definido como el conjunto de las clases de funciones [f] cuyo módulo a la potencia p-ésima es integrable, caracterizamos este espacio como:

$$L^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} : ||f||_{L^p} < +\infty, \mu - c.t.p\}$$

Es decir:

$$L^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}) = \frac{\mathcal{L}^P(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})}{R_\mu}$$ "

Se prueba además que es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mathbb{K})$, denotaremos además $\int |f|^p \, d\mu$ en lugar de $\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)$ y $||f||_p$ en lugar de $||f||_{L^p}$ a menos que hay confusión.

Observación 10. El espacio Lp para $1 \leq p < \infty$ con las operaciones definidas se la siguiente manera:

$[f] + [g] := [f + g]$, $\alpha[f] := [\alpha f]$ con $[f], [g] \in L^p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

forman un espacio lineal. Ademas se sabe que L^p es un espacio normado y que con la norma $||.||_p$ es completo; es decir L^p es de Banach. En particular, dado que la norma $||.||_{L^2}$ esta inducida por el producto escalar $\langle , \rangle_{L^2}$ donde:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_\Omega fg \, dx, \ \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

resulta que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

2.2.1. Desigualdad de Holder y de Minkowski

Para aspectos mas practicos trabajaremos convenientemente con la función representante f, en lugar de [f]; en adelante para referirnos a la clase de equivalencia [f], nos referiremos como ”el elemento f de L^p ” y denotaremos $||f||_p$ en lugar de $||[f]||_p$. Ahora se obtendrá que la función $||.||_p$ definida para todo $f \in L^p$ satisface la desigualdad del triangulo. Para ello se necesita del siguiente resultado.

Lema 4 (Desigualdad de Young). Sean a, b números reales no negativos, $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración: Ver la demostración en Gonzales [16]

Este lema es muy importante para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7 (Desigualdad de Holder). Sean $f, g : X \to \mathbb{K}$ con $f \in L^p$ y $g \in L^q$, donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $f.g \in L^1$ y $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$.

Demostración: Ver la demostración en Gonzales [16]

La desigualdad anterior pueden escribirse de la forma:

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq (\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x))^{\frac{1}{p}} (\int_X |g(x)|^q\, d\mu(x))^{\frac{1}{q}}$$

La desigualdad de Holder implica que el producto de una función en L^p y una función en L^q es integrable cuando p > 1 y "q" satisface la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dos números que satisfacen esta relación se llaman índices conjugados. Cuando p=2 entonces q=2 asi que la desigualdad de Holder recibe el nombre de desigualdad de "Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz".

Proposición 5 (Desigualdad de Minkowski-1). Si f y g pertenecen a L^p, $p \geq 1$, entonces $f + g \in L^p$ y $||f + g||_p \leq |||f||_p + ||g||_p$

Demostración: Ver la demostración en Gonzales [16]

Con todo lo anterior L^p es un espacio normado bajo la norma $||.||_p$.

Teorema 8 (Riesz-Fischer). Los espacios L^p , $1 \leq p < \infty$, son espacios de Banach.

Demostración: Ver la demostración en Gonzales [16]

2.3 Distribuciones

En este capítulo estudiaremos las distribuciones o funciones generalizadas de L.Schwartz, la definición de una distribución asi como el conocimiento de las distribuciones tanto regulares como irregulares, lo que es la Delta de Dirac su formalización y la derivada de una distribución además de algunos ejemplos de la derivada de una distribución.

2.3.1 Definición

En el resto de este capítulo, tomaremos x=$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$y Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ mientras no se diga lo contrario ($n \geq 1$ es un entero)

Definición 29. Según Chamorro (2010) mencionó lo siguiente: "Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función; El conjunto

$$soppu = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

es el llamado conjunto soporte de u" (p.269).

Observación 11. De la propia definición es fácil deducir que el conjunto sopp u es un cerrado contenido en $\overline{\Omega}$; Además si $x \notin soppu$ entonces $u(x) = 0$.

El conjunto sopp ϕ es un cerrado en $\overline{\Omega}$. Necesitamos considerar varios subespacios $C^0(\Omega) \overset{\text{not}}{=} C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_c^0(\Omega)$, $C_c^k(\Omega)$ y $D(\Omega)$. Que estan definidos de la siguiente manera:

$C^0(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \Re : \varphi$son funciones continuas $\}$

$C^k(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega) : \varphi$ son funciones k veces continuamente diferenciables $\}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{i=1}^k C^i(\Omega)$

$C_c^0(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega) : sopp\varphi$ es un compacto de $\Omega\} \overset{\text{not}}{=} C_0^0(\Omega)$

$C_c^k(\Omega) = C_c^0(\Omega) \cap C^k(\Omega)$

$D(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$: espaciod e funciones test.

Teorema 9. Para $1 \leq p < \infty$, $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$

Demostración: Ver la demostración en Fernandez [9]

Definición 30. Según Ferragut y Asencio (2007, p.7) mencionaron lo siguiente: "Llamaremos multi-índice a todo elemento α de $\mathbb{N}^n$, esto es $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n)$ donde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Si $\varphi \in C^k(\Omega)$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$ / $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n \leq k$, denotaremos por

$$\partial^\alpha \varphi = (\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}})(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}})...(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}})\varphi = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{\|\alpha\|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D^\alpha \varphi$$

A la deriva parcial, y por convención $D^{(0,0,\dots,0)}\varphi = \varphi$.”.

Definición 31 (continuamente compacto). Según Gatica (2011) mencionó lo siguiente: “Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es no vacio, diremos que G es continuamente compacto en Ω si y solo si $\overline{G} \subset \Omega$ y G es un compacto” (p.38).

Definición 32. Según Kolmogorov y Fomin (1970) mencionaron lo siguiente: “Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio, una sucesión $\{\phi_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ converge a $\phi \in C^\infty(\Omega)$ en el sentido del espacio $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ (recordemos que $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial) si se cumple:

1. ∃ K continuamente compacto en $\Omega \,/\, sopp(\phi_j - \phi) \subset K$, para todo j

2. $lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para todo α multi-índice” (p.208).

Observación 12. D(Ω) es dotado de cierta topologia que proviene de la noción de convergencia ; El dual topologico de D(Ω), es decir el espacio vectorial de las formas lineales y continuas sobre D(Ω) se le denotará por $D'(\Omega)$ y lo denominaremos espacio de distribuciones .

Observación 13. Este conjunto $D'(\Omega)$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidas como se verá a continuación:

1. Si T y L $\in D'(\Omega)$ entonces T+L ∈ $D'(\Omega)$, es decir :

$$(T+L)(\varphi) = T(\varphi) + L(\varphi) \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega).$$

2. Si $T \in D(\Omega)$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $aT \in D'(\Omega)$, es decir :

$$(aT)(\varphi) = aT(\varphi) \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

Definición 33. Según Kolmogorov y Fomin (1970) indicaron lo siguiente: “Una distribución sobre Ω es cualquier aplicación $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal y secuencialmente continua, es decir, tal que $\{\varphi_j\}_{j\geq 1} \subset D(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ verifican $\varphi_n \to \varphi$ en D(Ω) , entonces $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ ” (p.208).

Definición 34. Según Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) indicaron lo siguiente: “Una función ψ definida en casi todas partes (c.t.p.) en Ω, es llamado localmente integrable en Ω siempre que $\psi \in L^1(A)$ y para todo A continuamente compacto en Ω, en este caso denotaremos $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$.
”

Afirmación.

Para cada $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$.El funcional T_ψ definido por:

$$T_\psi(\phi) = \langle T_\psi, \phi \rangle = \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

Es una distribucion.

Demostración:

Sea ϕ_1 , ϕ_2 y $D(\Omega)$ y $b \in \mathbb{K}$:

$$T_\psi(\phi_1 + b\phi_2) = \int_\Omega \psi(x)(\phi_1 + b\phi_2)(x)dx$$

$$T_\psi(\phi_1 + b\phi_2) = \int_\Omega \psi(x)\phi_1(x)dx + b\int_\Omega \psi(x)\phi_2(x)dx$$

$$T_\psi(\phi_1 + b\phi_2) = T_\psi(\phi_1) + bT_\psi(\phi_2)$$

Por lo tanto $T(\psi)$ es lineal.

Luego supongamos que $\phi_j \to \phi$ en $D(\Omega)$ entonces tenemos que existe K continuamente compacto en Ω tal que $sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para todo j y $D^\alpha\phi_j \to D^\alpha\phi$ uniformemente en K para todo α multi-índice.

Dado K continuamente compacto en Ω entonces $\overline{K}$ es un compacto. Si F es la colección de conjuntos abiertos de Ω tal que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{A \in F} A$ entonces existen $A_1, A_2, \ldots A_n$ en F de manera que:

$\overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ademas $K \subset \overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ luego para todo j mayor que cero se tiene:

$$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| = \left|\int_\Omega \psi(x)\phi_j(x)dx - \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx\right|$$

$$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| = \left|\int_\Omega \psi(x)(\phi_j(x) - \phi(x))dx\right|$$

$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| = \left|\int_K \psi(x)(\phi_j(x) - \phi(x))dx\right|$

Esto es pues porque $\phi_j(x) - \phi(x)$ se anula fuera del soporte compacto:

recordemos ademas que:

- $x \in sopp(\phi_j - \phi)$ entonces $\phi_j(x) - \phi(x) \neq 0$
- $x \notin sopp(\phi_j - \phi)$ entonces $\phi_j(x) - \phi(x) = 0$

es decir, que $\phi_j - \phi \in D(\Omega)$ significa que existe un conjunto K continuamente compacto en Ω donde no se anule. Luego prosiguiendo con la demostración tenemos:

$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| \leq \int_K |\psi(x)|\,|(\phi_j(x) - \phi(x))|dx$

$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| \leq \int_K |\psi(x)|\, sup_{x \in K}\, |(\phi_j(x) - \phi(x))|dx$

$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| \leq sup_{x \in K}\, |(\phi_j(x) - \phi(x))| \int_K |\psi(x)|dx$

por otro lado tenemos que:

$\int_K |\psi(x)|dx \leq \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} |\psi(x)|dx$

$\int_K |\psi(x)|dx \leq \int_{A_1} |\psi(x)|dx + \int_{A_2} |\psi(x)|dx + ... + \int_{A_n} |\psi(x)|dx$

$\int_K |\psi(x)|dx \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{A_i} |\psi(x)|dx$

Luego reemplazando esto en lo anterior tenemos:

$$|T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| \leq sup_{x \in K}\, |(\phi_j(x) - \phi(x))| \,.\, \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |\psi(x)|dx \qquad (3.1)$$

Pero para α = (0, 0, ..., 0) se tiene:

$\frac{\partial^\alpha \phi_j(x)}{\partial t^\alpha} \to \frac{\partial^\alpha \phi(x)}{\partial t^\alpha}$

Es equivalente a:

$\phi_j(x) \to \phi(x)|$

Luego:

$lim_{j \to \infty} \phi_j(x) = \phi(x)$

Esto es:

$lim_{j\to\infty} |\phi_j(x) - \phi(x)| = 0$

Luego de (3.1) el ultimo termino tiende a cero en el limite cuando j $\to$ ∞

$lim_{j\to\infty} |T_\psi(\phi_j) - T_\psi(\phi)| = 0$

Entonces $T_\psi(\phi_j) \to T_\psi(\phi)$ en $\mathbb{R}$, asi T_ψ es secuencialmente continua .

Por lo tanto $T_\psi \in D'(\Omega)$.

Ejemplo 9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ conjunto abierto no vacio; y

$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles : $\int_\Omega |f|^2\, dx < \infty\}$

es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar esta definido por: $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$

y su norma asociada esta definido por: $||f||_{L^2} = (\int_\Omega f^2(x)\; dx)^{\frac{1}{2}}$. Para cada $f \in L^2(\Omega)$ le asociamos T_f definida por $\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$ para todo $\phi \in D(\Omega)$. La $L^2(\Omega) \to D'(\Omega)$ que asigna a cada función f la correspondiente distribución asociada T_f asi definida es inyectiva y continua.

2.3.1.1 Distribuciones Regulares

Definición 35. Según Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) indicaron lo siguiente: “Diremos que una distribución T es regular si para todo $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$; T se puede expresar de la siguiente manera:

$$T_\psi(\phi) = \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx$$ ”

Ejemplo 10. Un ejemplo de distribución regulares seria el siguiente, si c es una constante entonces $c \in L^1_{loc}(\Omega)$ y genera la distribución:

$T_\psi(\phi) = \int_\Omega c\phi(x)dx = c\int_\Omega \phi(x)dx$ para $\psi = c$

2.3.1.2 Distribuciones Singulares

Definición 36. Según Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) indicaron lo siguiente: “Diremos que una distribución es singular si es generada por ψ donde ψ es una función singular ; A este tipo de funciones generalizadas no lo podemos representar por:

$$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \psi(x)\phi(x)dx$$ ”

Ejemplo 11. Un ejemplo de distribución singular seria el siguiente:

$T_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{x^n}\phi(x)dx$ para $\psi = \frac{1}{x^n}$

pues este no cumpliria con las condiciones para ser una distribución, además porque no seria convergente para todas la funciones de prueba.

¿Existen otros tipos de funciones generalizadas singulares?

La respuesta es si, una de ellas es la bien conocida **LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.**

Acontinuación veremos una reseña de lo que es **LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.**

2.3.2 La función Delta de Dirac

La teoría de distribuciones tomo su forma final en la mitad del Siglo XX. A pesar que P. Dirac y S. Sobolev contribuyeron bastante, la teoría de distribuciones fue desarrolla en definitiva por L. Schwartz, esta teoría fue utilizada en forma incorrecta por muchos años y específicamente por los físicos e ingenieros, quienes usaban de la función delta de Dirac en forma intuitiva. Se define la función delta de Dirac en forma informal u ordinaria,incluso en lo contemporáneo, de la siguiente manera:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } x \neq a \\ +\infty & : \text{ si } x = a \end{cases}$$

con las siguientes propiedades:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\delta(x-a)dx = f(a)$ para toda funcion f continua.

Antes de formalizar veremos algunas propiedades y mas adelante se vera la definición precisa de la función delta de Dirac.

Observación 14. En este momento veremos la función delta de Dirac como límite, para esto se dara una idea intuitiva de la función delta de Dirac, comenzaremos por definir una sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & : si\, 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & : otro\ caso \end{cases}$$

Haciendo que $n \to \infty$.

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & : si\ x = 0 \\ 0 & : si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Hasta esta parte se tiene una idea intuitiva de lo que es la función delta de Dirac. Paul M. Dirac encontró algunas propiedades:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\delta(x)dx = f(0)$
2. $\delta(-x) = \delta(x)$
3. $(x \neq 0), x\delta(x) = 0$
4. $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{a}$, $a > 0$
5. $\delta(x) = \dfrac{dH}{dx}$

Donde:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : \text{si } x > 0 \\ 1 & : \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Observación 15. Un dato muy importante es que la función delta de Dirac es un caso particular en la teoria de distribuciones.

Nota. De la teoria de integración tenemos que si:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Esto implicaria que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 0$ en vez de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1$

En la física e ingenieria, la función delta de Dirac aparece en expresiones como:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x).\delta(x-a)dx = f(a)$ llamándole la **propiedad de muestreo integral** o de **cribado.**

Formalización de la función delta dirac.- La formalización de la función delta Dirac se hace mediante el siguiente teorema.

Teorema.- Sea el punto $a \in I$ (intervalo abierto) sobre $\mathbb{R}$ y $\psi \in C(I)$ (espacio de funciones continuas sobre I), la sucesión de funciones positivas $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$ para todo n, converge si para todo $\psi \in C(I)$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\psi(x)dx = \psi(a)$.

Demostración: Ver la demostración en Antunez [2].

Definición 37 (Definición de la función Delta Dirac). Según Yosida (1980) mencionó lo siguiente:

> Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:
>
> $$T_{\delta_p}(\varphi) = \varphi_p \text{ donde p es un punto fijo de } \Omega, \varphi \in D(\Omega).$$
>
> Define la función generalizada T_{δ_p} en Ω. T_{δ_p} es llamado la distribución Dirac concentrada en el punto $p \in \Omega$. En particular si p = 0, el origen de $\mathbb{R}^n$, nosotros escribiremos T_δ o δ para denotar T_{δ_0}. (p.48).

La función delta de Dirac se dice que es un función simbolica ya que puede definirse solamente por las propiedades de sus integrales.

Sea $\phi(x)$ una función de prueba, es decir continua e infinitamente derivable y que se anula fuera de algún intervalo finito por definición, entonces tenemos la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

Apartir de ahora, si $T \in D'(\Omega)$ y $\phi \in D(\Omega)$, si queremos podemos usar la notación siguiente $\langle T, \phi \rangle = T(\phi) \in \mathbb{R}$ pues es comun representar un distribución, ya sea regular o singular, por medio de esta representación en casi todos los textos de matemática avanzada relacionadas con este tema .

Teorema 10. La delta función de Dirac es una distribución.

Demostración:

Representemos por $\langle T_\delta, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = T_\delta(\phi) = \phi(0)$.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones de prueba, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle T_\delta, \phi_1 + \alpha.\phi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)(\phi_1 + \alpha.\phi_2)(x)dx$$
$$\langle T_\delta, \phi_1 + \alpha.\phi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)(\phi_1(x) + \alpha.\phi_2(x))dx$$

$$\langle T_\delta, \phi_1 + \alpha.\phi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi_1(x)dx + \alpha. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi_2(x)dx$$

$$\langle T_\delta, \phi_1 + \alpha.\phi_2 \rangle = \langle T_\delta, \phi_1 \rangle + \alpha. \langle T_\delta, \phi_2 \rangle$$

Asi delta es lineal .

Veamos ahora que sea secuencialmente continua, supongamos que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $D(\Omega)$, entonces por definición existe K continuamente compacto en Ω tal que el $sopp(\phi_i - \phi) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para todo α multi-índice entonces $|T_\delta(\phi_j) - T_\delta(\phi)| = |\phi_j(0) - \phi(0)| \to 0$ cuando $j \to \infty$ porque si $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ tenemos que:

$$lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$$

Y se sabe que:

limj→∞ φj (x) = φ(x)

Además:

$lim_{j\to\infty} |\phi_j(x) - \phi(x)| = 0$

luego para x = 0 tenemos que $lim_{j\to\infty} |\phi_j(0) - \phi(0)| = 0$

Por lo tanto se corrobora lo anterior, así que $\langle T_\delta, \phi\rangle$ es secuencialmente continuo.

Por lo tanto Tδ es una distribución.

En referencia a la delta de Dirac hay muchas formas de representarla, acontinuación mostraremos algunas de las mas utilizadas:

$$T_\delta(\phi) = \delta(\phi) = \phi(0)$$

A veces se usa la notación $\delta_a(x)$ para representar:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ +\infty & \text{si } x = a \end{cases}$$

Es decir $\delta_a(x) = \delta(x-a)$, esta es la representación de la función delta de Dirac concentrada en el punto a ∈ Ω = R, en este caso se usa la siguiente notación para representar la distribución de la delta de Dirac concentrada en el punto a:

$$T_{\delta_a}(\phi) = \delta_a(\phi)$$

Así en algunos textos encontraremos algunas de las siguientes notaciones que mostraremos :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\phi(x)dx = \phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\phi(x)dx = \delta_a(\phi)$$

ó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)\phi(x)dx = \delta_0(\phi) = \delta(\phi)$$

Esta última es la representación de la delta de Dirac concentrada en el origen $(a = 0)$.

2.3.3 Derivada de una distribución

Definición 38. Según Yosida (1980, pp. 49-50) mencionó lo siguiente: "Sea $T \in D'(\Omega)$ una distribución, $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, se define la derivada de T respecto de x_i en el sentido de las distribuciones como:

$(D^1T)(\phi) \overset{\text{def}}{=} \langle D^1T, \phi \rangle = -T(D^1\phi) \overset{\text{def}}{=} -\langle T, D^1\phi \rangle$ para todo $\phi \in D(\Omega)$

De manera general, sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice se define:

$(D^\alpha T)(\phi) \overset{\text{def}}{=} \langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}.T(D^\alpha \phi) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle$ para todo $\phi \in D(\Omega)$".

Usando la otra notación de derivada generalizada tendriamos: $\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = \langle D^\alpha T, \phi \rangle$

Algunas propiedades:

1. Si $f \in C^1(\Omega)$ su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones; es decir $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \dfrac{\partial T_f}{\partial x_i}$.

2. La aplicación $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es continua.

3. la aplicación $D^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es continua $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

4. Una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.

Ejemplo 12. Veamos cual es la representación de la α − esima derivada de la distribución de la delta de Dirac o función generalizada de Dirac concentrada en el origen.

Sabemos que se cumple: $D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|}.T(D^\alpha \phi)$ para todo $T \in D'(\Omega)$ y para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Sea $T = \delta$

Entonces $D^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}.\delta(D^\alpha \phi)$

Como $\phi \in D(\Omega)$ entonces $D^\alpha \phi \in D(\Omega)$.

Usando la definición anterior $\delta(\phi) = \phi(0)$

Entonces tendriamos que: $D^{\alpha}\delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}.D^{\alpha}\phi(0)$

Ejemplo 13. De manera análoga veamos cual seria la representación de la primera derivada de la función escalonada o función de HEAVISIDE, para esto, sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Hacemos notar que como $H \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces se puede usar la expresión T_ψ.

Para $\psi = H$:

$$T_H(\phi) = \int_\Omega \phi(x)H(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)H(x)dx$$

$$T_H(\phi) = \int_{-\infty}^{0} \phi(x)H(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \phi(x)H(x)dx$$

$$T_H(\phi) = \int_{0}^{+\infty} \phi(x)H(x)dx$$

A la expresión anterior tambien se le suele llamar la función HEAVISIDE generalizada. Luego usando la definición de la primera derivada distribucional para $T = T_H$ y sea $\phi \in D(\mathbb{R})$ con soporte compacto en [−a, a] (esto es por la definición de función test o prueba) y para $\alpha = \overline{1}$.

$$(T_H)'(\phi) = D'(T_H)(\phi) = (-1)^{|1|}.T_H(\phi') = (-1)^{|1|}T_H(D'(\phi))$$

$$(T_H)'(\phi) = -T_H(\phi')$$

$(T_H)'(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)\,dx$

$(T_H)'(\phi) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi'(x)\,dx$

$(T_H)'(\phi) = -\int\limits_{-a}^{+a} H(x)\phi'(x)\,dx$

$(T_H)'(\phi) = -(\int\limits_{-a}^{0} H(x)\phi'(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+a} H(x)\phi'(x)\,dx)$

$(T_H)'(\phi) = -\int\limits_{0}^{+a} H(x)\phi'(x)\,dx$

$(T_H)'(\phi) = -\phi(x)/_0^a = -(\phi(a) - \phi(0))$ (3.2)

Como $sopp(\phi) \subset [-a,a] = \overline{\{t \in \mathbb{R}/\phi(t) \neq 0\}}$

Entonces como $t = a \notin sopp(\phi)$ entonces $\phi(a) = 0$

Luego de (3.2) tenemos que:

$(T_H)'(\phi) = -(0 - \phi(0)) = \phi(0) = \delta(\phi) \in D'(\mathbb{R})$

Entonces $(T_H)'$ es una distribución y $(T_H)'(\phi) = \phi(0) = \delta(\phi)$.

2.4 Espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

En este capítulo se dará a conocer la definición del espacio de Sobolev así como los subespacios $H^k(\Omega)$; algunas reglas algebraicas para la gradiente pues estas nos ayudaran para el desarrollo de las aplicaciones, además veremos la definición de las formas bilineales H-elípticas así como también dos herramientas muy importantes el Teorema de Rango Cerrado y el operador acotado inferiormente.

Definición 39. Según Yosida (1980, p.55) indicó lo siguiente: “Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1,\infty)$. Se define

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$$

Para $1 \leq p < \infty$ la norma $||\cdot||_{k,p}$ es definida como

$$||f||_{k,p} \overset{\text{not}}{=} ||f||_{W^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} |D^\alpha f|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_p^p\right)^{1/p},$$

Para $p = \infty$, se tiene:

$$||f||_{k,\infty} \overset{\text{not}}{=} ||f||_{W^{k,\infty}} = \max_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_\infty$$

En el caso especial p = 2 se abrevia $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$

En el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ se usa la siguiente seminorma estándar:

$$|f|_{k,p} \overset{\text{not}}{=} |f|_{W^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha f||_p^p\right)^{1/p}$$

Para $1 \leq p < \infty$ y

$$|f|_{k,\infty} \overset{\text{not}}{=} |f|_{W^{k,\infty}} = \max_{|\alpha|=k} ||D^\alpha f||_\infty$$

Teorema 11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, k ≥ 1 un entero positivo y p ∈ [1, +∞]. Entonces el espacio de Sobolev W k,p (Ω) es un espacio de Banach.

Demostración: Ver demostración en Adams y Fourier [3]

2.4.1 Espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$

Sea $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ por simplicidad, pondremos habitualmente:

$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ f = f(x),\ \nabla f = Df = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$ (grafiente de f)

y

$D^2 f = (\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial f}{\partial^2 x_n})$ (hessiano de f)

Observación 16 (Reglas algebraicas para la gradiente). Sea :

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

y

$$\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial x_n})$$

se establece las siguientes reglas:

1. $\nabla(kf) = k\nabla f$, donde k= constante

2. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

3. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$

4. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

5. $\nabla(\frac{f}{g}) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Ejemplo 14. Para una función diferenciable f (x, y, z) y un vector unitario $u = (u_1, u_2, u_3)$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

y

$$D_u f = \nabla f.u = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

donde $D_u f$ es la derivada direccional de f en la dirección de u.

Definición 40. Según Ferragut y Asensio (2007, p.29) mencionaron lo siguiente: "En el caso especial donde p = 2, llamaremos espacio de Sobolev de orden k sobre Ω con $k \geq 1$, al espacio $H^k(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{k,2}(\Omega)$ tal que:

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\} \subset L^2(\Omega)$$

dotado de la norma :

$$||f||_{H^k} \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{0 \leq \alpha \leq m} ||D^\alpha f||^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

el producto escalar:

$$(f,g)_{H^k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} D^\alpha f D^\alpha g \, dx = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}$$ ”

Observación 17. Si k = 0 tenemos:

$$H^0(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^0 f \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)$$

Observación 18. El espacio $W^{k,p}$ dotado de la siguiente norma:

$$|f||_{W^{k,p}} = ||f||_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{k} ||D^\alpha f||_{L^p} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{L^p}$$

es un espacio de Banach, esta norma es equivalente a la de $W^{k,p}(\Omega)$ vista anteriormente; Y el espacio $H^k(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{k,2}(\Omega)$ dotado de un producto escalar, también se puede escribir de la siguiente manera:

$$(f,g)_{H^k} = (f,g)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert. Por otro lado se puede observar claramente que : $||f||_{W^{k,p}} \geq ||f||_{L^p}$, esta desigualdad será bien utilizada en las aplicaciones, para poder determinar la continuidad de ciertas formas lineales.

Teorema 12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ un entero positivo. Entonces el espacio de Sobolev $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, dotado del producto interno

$$(f,g)_{k,2} \stackrel{\text{not}}{=} (f,g)_{W^{k,2}} = \int_\Omega \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} D^\alpha f D^\alpha g \, dx = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración: Ver la demostración en Treves [26]

Definición 41. Según Fernandez (s.f., p.32) indico lo siguiente: “Se define el espacio de sobolev $H^1(\Omega)$ como el como el conjunto de todas las (clases de) funciones de $L^2(\Omega)$ tales que sus derivadas primeras en el sentido de $D'(\Omega)$ pertenecen a $L^2(\Omega)$. Es decir:

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \partial_i f \in L^2(\Omega)\ para\ 1 \leq i \leq d\},,$$

Si p=2 y k=1 de $||f||_{k,p} = (\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_p^p)^{1/p}$ se obtiene que:

$$||f||_{k,2} = (\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_2^2)^{1/2}$$

Entonces

$$||f||_{1,2} = (||D^0 f||_2^2 + ||D^1 f||_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

luego:

$$||f||_{1,2} = (||f||_2^2 + ||D^1 f||_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

entonces cambiando de notación tendriamos que:

$$||f||_{1,2} = (||f||_{L^2}^2 + ||D^1 f||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

y asi tenemos:

$$||f||_{H^1(\Omega)} = (||f||_{L^2}^2 + ||D^1 f||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde esta es la norma de H^1; si no hay confusión se representara $||f||_{H^1}$ en vez de $||f||_{H^1(\Omega)}$

Observación 19. Sea $I \subset \mathbb{R}$ (intervalo); u', v' son las derivadas de u, v en $\mathbb{R}$respecticamente.

El espacio $W^{1,p}(I)$ esta dotado de la norma:

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p}$$

Ademas el espacio $H^1(I)$ esta dotado del producto escalar:

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$$

Y la norma asociada:

$$||u||_{H^1} = (||u||_{L^2}^2 + ||u'||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Es equivalente a la norma $W^{1,2}(I)$.

2.4.2 Formas bilineales

Otro tipo de operador especial muy frecuente en el estudio de problemas de valor de frontera, es uno que mapea un par de elementos a los números reales, y que es lineal en cada uno de estos.

Definición 42. Según Calderon y Gallo (2011, pp. 15-16) mencionaron lo siguiente: “sean X y Y espacios lineales normados. Se dice que una forma $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ es bilineal si ella es lineal en cada uno de de sus componentes, es decir:

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v) \quad u, w \in X, v \in Y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w) \quad u \in X, v, w \in Y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$”

2.4.2.1 Formas bilineales continuas

Definición 43. Según Fernandez (s.f., p.27) mencionó lo siguiente: “Consideremos una forma bilineal $B : X \times Y \to \mathbb{R}$, donde X y Y son espacios lineales normados. Se dice que la forma bilineal es acotada si existe una constante k > 0 tal que:

$$|B(u, v)| \leq k||u||||v|| \text{ para todo } u \in X, v \in Y$$”

Ademas B es llamada una forma bilineal continua (esta definición debe ser comparada con la del operador acotado, o funcional lineal acotado).

2.4.2.2 Formas bilineales H-elípticas

Definición 44. Según Fernandez (s.f., p.27) indicó lo siguiente: “Dada una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$, donde H es un espacio producto interno, se dice que B es H-elíptica (o fuertemente coerciva), si existe una constante α > 0 tal que

$$B(v, v) \geq \alpha||v||_H^2 \quad \forall v \in H$$„

Así una forma H-elíptica es acotada inferiormente.

Definición 45. Según Alvarez (s.f., p.45) indicó lo siguiente: “Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{R}$ y $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que B es débilmente coerciva si existe una costante positiva δ tal que:

$$\sup_{\substack{y\in Y \\ ||y||=1}} |B(x,y)| \geq \delta ||x|| \qquad \forall x \in X$$

ademas para toda y ∈ Y − {0} se tiene que :

$$\sup_{x\in X} |B(x,y)| > 0$$ ”

Además mas adelante en el capítulo IV se verá que esta definición de coercividad débil es equivalente a las condiciones (2) y (3) en el teorema generalizado de Lax- Milgram; que en una nota más adelante se probará la equivalencia.

2.4.3 El Teorema de Rango Cerrado y Operador Acotado Inferiormente

Proposición 6. Sea un conjunto cualquiera $Z \subset X$, X es Espacio Vectorial Normado. Entonces se cumple $Z \subset (Z^{\circ})^{\circ}$

Demostración:

Sea $z \in Z$ y tomemos $g \in X^{*}$ talque $\langle g, z\rangle_{X^{*},X} = 0$ sii $g \in Z^{\circ} \subset X^{*}$. Por lo tanto sabemos que como $z \in Z \subset X \subset X^{**}$entonces $z \in X^{**}$. Y ahora como $z \in X^{**}$ tal que $\langle g, z\rangle_{X^{*},X^{**}} = 0$ con $g \in Z^{\circ}$ si y solo si $z \in (Z^{\circ})^{\circ}$

Proposición 7. Sea $Z \subset X$ subespacio lineal, X es Espacio Vectorial Normado y además es reflexivo. Entonces Z es cerrado en X si y solo si $Z = (Z^{\circ})^{\circ}$

Demostración:

(⇐ Por proposición anterior Z° es cerrado entonces $(Z^{\circ})^{\circ}$ es también cerrado, pero por hipótesis $Z = (Z^{\circ})^{\circ}$ entonces Z es cerrado.

⇒) Para la ida solo faltaria probar $(Z^{\circ})^{\circ} \subset Z$, pues la otra inclusión ya esta probada; probemos esto por reducción al absurdo.

Supongamos que existe algún $x \in (Z^\circ)^\circ$ y que $x \notin Z$ $(x \neq 0)$, entonces tenemos que $x \in (Z^\circ)^\circ \setminus Z$ y como Z es cerrado entonces $d = dis(x, Z) > 0$ luego por lema de Mazur existe $f \in ((Z^\circ)^\circ)^*$ tal que $f(x) \neq 0$ y $f(z) = 0\ \forall z \in Z$, por último se observa que $f \in Z^\circ$

.

Ademas sabemos que $x \in (Z^\circ)^\circ \subset X^{**} = X$ entonces x ∈ X, luego como $x \in (Z^\circ)^\circ \subset X$ y $f \in Z^\circ \subset X^*$ entonces $f(x) = \langle f, x \rangle = 0$, contradicción, por tanto se cumple que $(Z^\circ)^\circ \subset Z$

Proposición 8. Sea X e Y Espacio Vectorial Normado, $T : X \to Y$ un operador lineal acotado.

Entonces:

$$N(T^*) = R(T)^\circ$$

Demostración:

Sea $y^* \in N(T^*)$ si y solo si $T^* y^* = 0$ sii $\langle x, T^* y^* \rangle = 0$, $\forall x \in X$ sii $\langle Tx, y^* \rangle = 0$, $\forall x \in X$ (y como $Tx \in R(T), \forall x \in X$) sii $y^* \in R(T)^\circ$.

Proposición 9. Sea X e Y Espacio Vectorial Normado, $T : X \to Y$ un operador lineal acotado.

Entonces se cumple:

$$N(T) = R(T^*)^\circ$$

Demostración:

En forma análoga a una proposición 8 supongamos $x \in N(T) \subset X$ sii $Tx = 0$ sii $\langle Tx, y^* \rangle = 0\ \forall y^* \in Y^*$ sii $\langle x, T^* y^* \rangle = 0\ \forall y^* \in Y^*$ (Como $T^* y^* \in R(T^*)$, $\forall y^* \in Y^*$) si y solo si $x \in R(T^*)^\circ$.

Teorema 13 (Teorema de Rango Cerrado). Sean X e Y Espacio Vectorial Normado, Y es reflexivo y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado.

Entonces R(T) es cerrado en Y si y solo si $R(T) = N(T^*)^\circ$

Demostración:

⇒) Dado que $Y = Y^{**}$ y $R(T) \subset Y$ es cerrado tenemos que se cumple:

$$R(T) = R(T)^{\circ\circ}$$

Y ademas como sabemos que: $R(T)^\circ \ = \ N(T^*)$ entonces $R(T) \ = \ R(T)^{\circ\circ} \ = N(T^*)^\circ$ por tanto $R(T) = N(T^*)^\circ$.

(⇐ Supongamos se cumple $R(T) = N(T^*)^\circ$ y $R(T)^\circ = N(T^*)$ entonces $R(T) = N(T^*)^\circ = R(T)^{\circ\circ}$ luego $R(T) = R(T)^{\circ\circ}$ es cerrado pues el anulador de un conjunto, es cerrado, por proposición vista anteriormente.

Definición 46. Sea X e Y Espacio Vectorial Normado y $T : X \to Y$. Diremos que T es un operador acotado inferiormente si existe algún $\gamma > 0$ tal que:

$$||Tx||_Y \geq \gamma||x||_X, \forall x \in X$$

Teorema 14. Sea X e Y Espacio de Banach, Y es reflexivo y $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. T es acotado inferiormente

2. R(T) es cerrado y T es inyectivo

3. $R(T) = N(T^*)^\circ$ y T es inyectivo

Demostración:

Por el teorema de rango cerrado se obtiene (2) ↔ (3).

Veamos (1) → (2)

Primero veamos que T sea inyectivo, es decir, N (T) = {0}

Sea $x \in N(T)$ entonces T (x) = 0 entonces $0 =| ||Tx||_Y \geq \gamma||x||_X$,$\forall x \in X$ entonces $||x||_X = 0$ entonces x = 0 por tanto $N(T) = \{0\}$.

Ahora veamos que R(T) se cerrado, sea $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R(T)$ tal que $y_i \to y$, tomemo $x_i \in X$ de tal manera que $Tx_i = y_i$ (esta elección es única) luego notamos que se cumple:

$$||y_i - y_k||_Y = ||T(x_i - x_k)||_Y \geq \gamma||x_i - x_k||_X \tag{4.1}$$

Y como $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente entonces es de cauchy luego por (4.1) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es de cauchy. Ahora como X es de Banach, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente, es decir, existe x ∈ X tal que $x_i \to x$, asi tenemos que :

$$Tx = T(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} Tx_i = \lim_{i\to\infty} y_i = y$$

Entonces $Tx = y \in R(T)$ por tanto R(T) es cerrado.

(2) → (1) Como $R(T) \subset Y$ es cerrado e Y es un EB por un corolario anterior R(T) es de Banach. Por lo tanto $T : X \to R(T)$ es invertible, Ademas como T es sobreyectiva y por el teorema de la aplicación abierta implica que T^{-1} es continua.

Luego tomamos $x \in X$ obteniendo que:

$$||x|| = ||T^{-1}Tx|| \leq ||T^{-1}||||Tx||$$

Y tomando $\gamma = \dfrac{1}{||T^{-1}||}$ se observa que T es acotado inferiormente.

Observación 20. Sea $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal:

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{\acute{i}nf}_{\substack{x\in X\\ ||x||=1}} \sup_{\substack{y\in Y\\ ||y||=1}} B(x,y) \geq \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname*{\acute{i}nf}_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{B(x,y)}{||x||||y||} \geq \gamma \\
&\Rightarrow \quad \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{B(x,y)}{||x||||y||} \geq \operatorname*{\acute{i}nf}_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{B(x,y)}{||x||||y||} \geq \gamma \\
&\Rightarrow \quad \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{B(x,y)}{||x||||y||} \geq \gamma, \forall x \in X - \{0\} \\
&\Rightarrow \quad \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{B(x,y)}{||y||} \geq ||x||\gamma, \forall x \in X
\end{aligned}
$$

III. Método

3.1 Tipo de investigación

El tipo de investigacion usado fue del tipo basica, con lo cual Sanchez y reyes (2015) indico que es:

> Llamada también pura, nos lleva a la búsqueda de conocimientos frescos y áreas de investigación, no tiene objetivos específicos. Su propósito es recoger información del entorno para mejorar el conocimiento científico, esta dirigido al descubrimiento de principios y leyes. (p.44).

Enfoque cualitativo

La investigación posee un enfoque cualitativo que según Hernández, Fernández y Baptista (2014) la define como aquella que: "Utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o mostrar nuevas interrogantes en el proceso de explicación" (p. 7)

3.2 Ambito temporal y espacial

3.2.1 Ambito temporal

La investigacion fue realizada a principios del año 2017 y hasta fines del año 2018, pero la recopilacion de la informacion fue progresiva.

3.2.2 Ambito espacial

La investigacion fue realizado mediante recopilacion de informacion mediante libros, revistas y libros virtuales de universidades nacionales e internacionales, por tanto no hay un ambito espacial de estudio.

3.3 Variables

Variable: La demostración matemática

Definición conceptual

Según Bourbaki (1970) la describe como teoría que comprende términos y relaciones siguiendo unas determinadas reglas.

3.4 Población y Muestra

Población

La población que se considero fue compuesta por todos los teoremas del área de matemáticas

Muestra

La muestra que se considero fueron los teoremas relacionados con el tema de investigación, en el área de matemáticas.

3.5 Instrumentos

Los instrumentos que se utilizaron fueron la lectura y la comprensión de libros y artículos

3.6 Procedimientos

El procedimiento de la investigacion puede ser dividido en las siguientes etapas:

- Adquisicion de la información
- Estudio de la información
- Obtencion del resultado

- Discusion de los resultados obtenidos
- Presentacion y publicacion de los resultados obtenidos

3.7 Análisis de datos

En base a la investigación realizada, para el análisis de la información seleccionada se hizo uso, del análisis conceptual.

3.8 Consideraciones éticas

- Tanto las definiciones como algunos teoremas seran citados ademas se tomara en cuentas las referencias, con ello se respetara el derecho de autor, de acuerdo a las normas APA.
- Para el desarrollo de la investigacion se contara con la autorizacion de la UNFV.

IV. Resultados

4.1 La Generalización del Teorema de Lax-Milgram

Como ya se dijo con anterioridad la Generalización del Teorema de Lax-Milgram es una herramienta indespensable para el estudio del buen comportamiento de las formulaciones variacionales de problemas de contorno lineales elípticas, por ello se demostrara el teorema de forma clara y precisa.

Teorema 15 (Generalización del Teorema de Lax-Milgram). Sea $\mathcal{X}$ y Y espacios de Banach reales, donde Y es reflexiva. Sea $a : \mathcal{X} \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal , $X \subset \mathcal{X}$ un subespacio cerrado, que cumplen las siguientes condiciones:

1. a es continua en $\mathcal{X} \times Y$, es decir, existe algun M > 0 tal que:

$$|a(x,y)| \leq M||x||_{\mathcal{X}}||y||_Y \quad \forall x \in \mathcal{X}, y \in Y$$

2. a satisface la condición de inf-sup sobre $X \times Y$, es decir, existe algun $\gamma > 0$ tal que:

$$\inf_{\substack{x \in X \\ ||x||_{\mathcal{X}}=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ ||y||_Y=1}} a(x,y) \geq \gamma > 0$$

3. a satisface la condición de no degenerado sobre X, es decir:

$$\sup_{x \in X} a(x,y) > 0 \quad \forall y \in Y, y \neq 0$$

Si $x_0 \in \mathcal{X}$ y $F \in Y^*$, entonces existe un único $u \in X + x_0 \subset \mathcal{X}$ tal que:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in Y$$

Además:

$$||u||_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\gamma}||F||_{Y^*} + (\frac{M}{\gamma} + 1)||x_0||_{\mathcal{X}}$$

Demostración:

Existencia:

Sea $x_0 \in \mathcal{X}$ y $F \in Y^*$

Caso I: $x_0 = 0$

Sea x ∈ X (fijo)

Definamos:

$$A_x : Y \to \mathbb{R}$$

donde

$$A_x(y) \overset{\text{def}}{=} a(x, y), \forall y \in Y$$

Afirmación 1: A_x Es funcional lineal continuo

En efecto:

$$|A_x(y)| = |a(x,y)| \leq M||x||||y||, \forall y \in Y \to \frac{|A_x(y)|}{||y||} \leq M||x||, \forall y \in Y \text{ ,} y \neq 0$$

$\to ||A_x||_{Y^*} \leq M||x||$ entonces A_x es continuo

y por la observación anterior tenemos por lo tanto A_x es funcional lineal continuo.

Por otro lado definamos:

$$A : X \to Y^*$$

donde

$$A(x) \overset{\text{def}}{=} A_x$$

Veamos la linealidad

Sea $a, b \in X$ entonces $A(a+b) = A_{a+b}$

Observación: Sea $y \in Y$:

$$A_{a+b}(y) = a(a+b, y) = a(a, y) + a(b, y) = A_a(y) + A_b(y), \forall y \in Y$$

$$\to A_{a+b} = A_a + A_b$$

Luego:

$$A(a+b) = A_{a+b} = A_a + A_b \to A(a+b) = A(a) + A(b)$$

Sea $a \in X$ y $k \in \mathbb{R}$

Observación: Sea $y \in Y$:

$$A_{ka}(y) = a(ka, y) = ka(a, y) = kA_a(y), \forall y \in Y$$

$$\to A_{ka} = kA_a$$

Luego:

$$A(ka) = A_{ka} = kA_a \to A(ka) = kA(a)$$

Afirmación 2: A es inyectivo

En efecto:

$$||A_x||_{Y^*} = \sup_{\substack{y\in Y \\ y\neq 0}} \frac{|A_x(y)|}{||y||} = \sup_{\substack{y\in Y \\ y\neq 0}} \frac{|a(x,y)|}{||y||} \geq \gamma ||x||$$

entonces A es acotado inferiormente y por el teorema 14 entonces A es inyectivo además $R(A) = N(A^*)^\circ$.

Afirmación 3: $N(A^*) = \{0\}$

En efecto:

Como sabemos $\sup_{x\in X} a(x,y) > 0$, $\forall y \in Y, y \neq 0$

Entonces por el Principio Arquimediano existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se cumple:

$$\sup_{x\in X} a(x,y) > \frac{1}{n_0}$$

Asi tambien tenemos que se cumple:

$$\sup_{x\in X} a(x,y) \geq \frac{1}{n_0}, \forall y \in Y, y \neq 0$$

Luego tomamos $y := \frac{y}{||y||}$ y obtenemos

$$\sup_{x \in X} a(x, \frac{y}{||y||}) \geq \frac{1}{n_0}$$

$$\sup_{x \in X} a(x, y) \geq \frac{1}{n_0}||y||, \forall y \in Y \tag{5.1}$$

Luego $A : X \to Y^*$ y $A^* : N(A^*) \subset Y^{**} \to X^*$

Sea $y \in N(A^*)$ si y solo si $A^*y = 0$ si y solo si $\langle x, A^*y \rangle$, $\forall x \in X$ si y solo si

$$\langle A_x, y \rangle = 0, \forall x \in X$$

Luego $a(x, y) = A_x(y) = \langle A_x, y \rangle = 0, \forall x \in X$ (5.2)

Luego de (5.1) y (5.2):

$$0 \geq \frac{1}{n_0}||y|| \to y = 0$$

Por tanto $N(A^*) = \{0\}$

Afirmación 4: $R(A) = Y^*$

En efecto:

Sabemos $R(A) = N(A^*)^{\circ}$

Luego como $N(A^*) = \{0\}$ entonces $N(A^*)^{\circ} = \{0\}^{\circ} = Y^{***} = Y^*$

por tanto $R(A) = Y^*$

Por otro lado como $F \in Y^*$ entonces $F \in R(A)$ entonces $\exists u \in X$ / $A_u = F$

es decir : $A_u(v) = F(v), \forall v \in Y$

Entonces tenemos que : $a(u, v) = F(v), \forall v \in Y$

Finalmente como :

$$||u||\gamma \leq ||A_u|| \to ||u|| \leq \frac{1}{\gamma}||F||$$

Caso II : $x_0 \neq 0$

Definamos :

$$\begin{array}{rlcl} \varphi : & X+x_0 & \to & Y^* \\ & \overline{x}=x+x_0 & \mapsto & \varphi(x+x_0)=\varphi_{x+x_0} \end{array}$$

donde :

$$\varphi_{x+x_0}(w) \stackrel{\text{def}}{=} a(x+x_0,w), \forall w \in Y$$

Afirmación 5: ϕ es inyectivo

En efecto:

Sea $\overline{x},\overline{y} \in X+x_0$ tal que $\varphi(\overline{x})=\varphi(\overline{y})$

entonces $\varphi(x+x_0)=\varphi(y+x_0) \to \varphi_{x+x_0}=\varphi_{y+x_0}$

Sea $w \in Y$:

$\varphi_{x+x_0}(w)=\varphi_{y+x_0}(w) \to a(x+x_0,w)=a(y+x_0,w)$

$\to a(x,w)+a(x_0,w)=a(y,w)+a(x_0,w) \to a(x,w)=a(y,w)$

$\to A_x(w)=A_y(w) \to A_x=A_y \to A(x)=A(y)$ y como A es inyectivo entonces x=y

Por tanto : $\overline{x}=\overline{y}$

Afirmación 6: φ es sobreyectivo

En efecto:

Como $x_0 \in X+x_0$ entonces $\varphi(x_0) \in Y^*$

Sabemos que $F \in Y^* \to F-\varphi(x_0) \in Y^*$

$\to \exists x \in X$ tal que $A_x = F-\varphi(x_0)$

Sea $w \in Y$:

$A_x(w)=(F-\varphi(x_0))(w)=F(w)-a(x_0,w) \to a(x,w)=F(w)-a(x_0,w)$

$\to a(x+x_0,w)=F(w) \to a(\overline{x},w)=F(w) \to \varphi_{\overline{x}}(w)=F(w) \to \varphi(\overline{x})=F$

Por tanto φ es sobreyectivo.

Finalmente como:

$|a(u,w)|=|F(w)|$

$\rightarrow |a(u-x_0,w)+a(x_0,w)| = |F(w)| \rightarrow |a(u-x_0,w)| - |a(x_0,w)| \leq |F(w)|$
$\rightarrow |a(u-x_0,w)| \leq |F(w)| + |a(x_0,w)| \leq ||F||||w|| + M||x_0||||w|| = ||w||(||F|| + M||x_0||)$
$\rightarrow \dfrac{|a(u-x_0,w)|}{||w||} \leq ||F|| + M||x_0||$, con $u - x_0 \in X$

$\rightarrow \gamma||u-x_0|| \leq \sup \dfrac{|a(u-x_0)|}{||w||} \leq ||F|| + M||x_0||$
$\rightarrow \gamma||u|| - \gamma||x_0|| \leq ||F|| + M||x_0|| \rightarrow \gamma||u|| \leq ||F|| + (M+\gamma)||x_0||$
$\rightarrow ||u|| \leq \dfrac{1}{\gamma}||F|| + (\dfrac{M}{\gamma} + 1)||x_0||.$

Unicidad:

Supongamos que existe u y u' que verifican: $a(u,v) = F(v)$ y $a(u',v) = F(v)$ $\forall v \in Y$

Entonces $a(u,v) - a(u',v) = 0\, \forall v \in Y \rightarrow a(u-u',v) = 0\, \forall v \in Y$

Y como sabemos: $\sup\limits_{\substack{y\in Y \\ y\neq 0}} \dfrac{a(x,y)}{||y||_Y} \geq \gamma||x||, \forall x \in X$

Para $y \neq 0$:

Entonces:

$$\sup_{\substack{y\in Y \\ y\neq 0}} \frac{0}{||y||_Y} \geq \gamma||u-u'|| \rightarrow 0 = ||u-u'|| \rightarrow u = u'$$

4.2 Aplicaciones

Para un mayor entedimiento de las aplicaciones que se desarrollara, se dara a conocer dos importantes herramientas como son la formulación de Green Generalizado y la Desigualdad de Poincaré que son la base para el desarrollo de las aplicaciones del Teorema Generalizado de Lax-Milgram además de una breve reseña de la ecuación de calor.

4.2.1 Resultados utilizados

Teorema 16 (Fórmula de Green generalizada). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto, acotado y suave. Sean $u \in C^2(\Omega)$ y $v \in C^1(\Omega)$ entonces:

$$-\int_{\Omega}(\Delta u)v\,dx = \int_{\Omega}(\nabla u)(\nabla v)\,dx - \int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\Gamma$$

Donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada de u en la dirección del vector unitario normal n.

Demostración: Ver la demostración del teorema en Gatica [11]

Teorema 17 (Desigualdad de Poincaré). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado con frontera regular. Entonces para toda función $u \in H_0^1(\Omega)$ se verifica la siguiente desigualdad

$$||u||_{L^2} \leq C||\nabla u||_{L^2}$$

Donde C es una constante positiva.

Demostración: Ver la demostración del teorema en Gomez y Granero [15]

Además si $\partial\Omega$ es la frontera de Ω y $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ la aplicación traza entonces $H_0^1(\Omega)$ es el nucleo de γ_0, esto es:

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Definición 47 (Problema Variacional). Sea un espacio de Hilbert H, una forma bilineal B : $B : H \times H \to \mathbb{R}$, una forma lineal y continua $F : H \to \mathbb{R}$, el problema variacional consiste en encontrar u ∈ H tal que:

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H \tag{VP}$$

Al elemento $u \in H$ se le llama solución débil de (VP)

4.2.2 Funciones de Green

Resolver un problema con condiciones en la frontera significa determinar una función que satisfaga una ecuación diferencial dada y condiciones de frontera específicas. El problema es independiente del tiempo, los problemas con condiciones en la frontera estan asociados con ecuaciones diferenciales parciales de tipo elípticas.

Existen varias formas de resolver problemas con condiciones en la frontera, los problemas fundamentales son cuatro, los cuales se enumeran continuación.

1. Primer problema con Valores en la Frontera (Problema de Dirichlet)

Según Valenzuela (2001) indicó lo siguiente: “Consiste en determinar una función u, que ademas de satisfacer la ecuación diferencial considerada, en una región Ω, satisface

$$u = g_1(x), \quad sobre \quad \partial\Omega$$

Donde $g_1(x)$ es una función continua sobre la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω.” (p.65).

2. Segundo Problema con Valores en la Frontera (Problema de Neumann)

Según Valenzuela (2001) indicó lo siguiente: **“**Consiste en determinar una función u definida en Ω, tal que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2(x) \quad sobre \quad \partial\Omega \text{ con } \int_{\partial\Omega} f(x)dS = 0$$

Donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada direccional a lo largo de la normal de la frontera $\partial\Omega$. La condición $\int_{\partial\Omega} f(x)dS = 0$ es conocida como condición de compatibilidad” (p.65)

3. Tercer Problema con Valores en la Frontera (Condiciones Mixtas)

Según Valenzuela (2001) mencionó lo siguiente: **“**Consiste en determinar una función u en Ω que satisface:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + q(x)u = g(x) \text{ sobre } \partial\Omega$$

donde g y q son funciones continuas” (p.66).

4. Cuarto Problema con Valores en la Frontera (Problema de Robin)

Según Valenzuela (2001, p.66) indicó lo siguiente: **“**Consiste en determinar una función u que satisfaga condiciones en la frontera de diferente tipo sobre diferentes porciones de la frontera de Ω, por ejemplo

$u = f_1(x)$ sobre $\partial\Omega_1$ y $u = f_2(x)$ sobre $\partial\Omega_2$

Sobre $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ ”.

Definición 48. Según Valenzuela (2001) mencionó lo siguiente: “Una función u se dice que es una función armónica en un dominio si satisface la ecuación de laplace $\Delta u = 0$, con sus dos primeras derivadas continuas en Ω” (p.66).

Esta es una de las principales ecuaciónes en las aplicaciones, junto con la ecuación no homogénea relacionada, $\Delta u = f(x)$, llamada ecuación de Poisson.

Aquí hemos usado la notación:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

se dice que $-\Delta$ es el operador de Laplace y que $-\Delta f$ es el Laplaciano de f.

4.2.3 La ecuación del calor

Consideremos la siguiente EDP lineal de segundo orden y coeficiente constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = F(x, t)$$

La EDP anterior es la ecuación del calor. Cuando el número de variables independientes es n+1, se suele decir que se trata de la ecuación n-dimensional (las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables espaciales; t es la variable temporal). Una de las tantas aplicaciónes frecuentes es, el comportamiento de los fenómenos difusivos; ejemplo, supongamos en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto ocupado por un medio conductor del calor y que sobre este medio actúa una fuente de calor $F = F(x, t)$ durante un intervalo temporal (0,T). Entonces, bajo determinadas circunstancias, se puede aceptar que la temperatura del medio verifica la EDP anterior para una constante K (la conductividad del medio).

El hecho de que la EDP anterior permita describir la evolución de una temperatura es justamente lo que motiva que llamemos ecuación del calor.

4.2.3.1 Problemas de valores iniciales, problemas de contorno y problema mixto para la ecuación del calor

En lo que sigue notaremos por u_t, u_x, u_{tt}, etc para asignar las sucesivas derivadas parciales de u.

Problema 1 :

El problema de valores iniciales (o problema de cauchy) para la ecuación del calor es el siguiente: Hallar una función $u : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = F(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Donde k > 0 y $F : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ y $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Problema 2 :

El problema mixto de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor: Hallar una función $u : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = F(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u = G(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$, $T > 0$, $k > 0$ y $F : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $G : \partial\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones dadas. Las condiciones impuestas sobre la frontera lateral $\partial\Omega \times (0,T)$ se llaman condiciones de contorno (de tipo Dirichlet).

4.2.4 Corolario de Lax-Milgram

Corolario 3 (Corolario de Lax-Milgram). Sea H un espacio de Hilbert. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua en $H \times H$ y H-elíptica, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que , $a(v,v) \geq \alpha ||v||^2, \forall v \in H.$. Si $F \in H^*$ entonces existe un único $u_0 \in H$ tal que:

$$a(u_0, v) = F(v), \forall v \in H$$

Además:

$$||u_0|| \leq \alpha^{-1} ||F||$$

Demostración:

Antes de comenzar con la demostración veamos algunos aspectos, es así que, dado H un espacio de Hilbert entonces tenemos que H es reflexivo, además tenemos que $H \subset H$ y H es cerrado en si mismo. La demostración de este corolario se demostrará en cinco afirmaciones.

Afirmación 1. F es lineal y continuo.

En efecto:

Es claro, pues por hipótesis $F \in H^*$

Afirmación 2. a es bilineal.

En efecto:

Es claro pues por hipótesis a es una forma bilineal.

Afirmación 3. a es acotado.

En efecto:

Es sencillo porque por dato a es continua en $H \times H$, por tanto existe M > 0 tal que:

$$|a(u,v)| \leq M ||u|| ||v|| \forall u, v \in H$$

Afirmación 4. a satisface la condición de inf-sup sobre $H \times H$.

En efecto:

Sabemos que a es fuertemente coerciva, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$a(v,v) \geq \alpha ||v||^2, \forall v \in H \tag{6.1}$$

Se deduce de (6.1):

$$a(\frac{v}{||v||}, v) \geq \alpha ||v||, \forall v \in H$$

Sea $u = \dfrac{v}{||v||}$ entonces se tiene:

$$a(u,v) \geq \alpha ||v||, \forall v \in H \tag{6.2}$$

luego:

$$\frac{a(u,v)}{||v||} \geq \alpha, \forall v \in H$$

Luego por el teorema del supremo tenemos:

$$\sup_{||v||=1} a(u,v) \geq \alpha \tag{6.3}$$

Proseguiendo de (6.3) el $\sup_{||v||=1} a(u,v)$ esta acotado inferiormente entonces existe el infimo, es así que se tiene lo siguiente:

$$\inf_{||u||=1} \sup_{||v||=1} a(u,v) \geq \alpha$$

Afirmación 5. a satisface la condición de de no degenerado sobre H.

En efecto:

Sabemos:

$$a(v,v) \geq \alpha ||v||^2, \forall v \in H$$

De (6.2) tenemos:

$$a(u,v) \geq \alpha ||v||^2, \forall u, v \in H$$

Ahora sea v = 0 y como α > 0, entonces tenemos:

$$\sup_{u\in H} a(u,v) \geq a(u,v) \geq \alpha ||v|| > 0$$

$$\sup_{u\in H} a(u,v) > 0. \forall v \in H, v \neq 0.$$

Por lo tanto, dado que se cumplen las hipótesis de la Generalización del Teorema de Lax-Milgram garantizamos la existencia y unicidad de la solución.

Finalmente existe un único $u_0 \in H + \{0\} \subset H$ tal que:

$$a(u_0, v) = F(v), \forall v \in H$$

Además:

$$||u_0|| \leq \frac{1}{\alpha} ||F||$$

4.2.5 Formulación variacional de problema de contorno en dimensión uno

Dado $\Omega =< 0, 1 >$ y $f \in L^2(\Omega)$, consideremos el problema de valores contorno.

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Hallando la formulacion variacional, multiplicando por $v \in H_0^{'}(\Omega)$ en:

$$-u''(x) = f(x)$$

y luego integramos por partes, obtenemos:

$$\int_0^1 -vu''\, dx = \int_0^1 vf\, dx$$
$$-\left(vu'/_0^1 - \int_0^1 u'v'\, dx \right) = \int_0^1 vf\, dx$$
$$\int_0^1 u'v'\, dx = \int_0^1 fv\, dx$$

Luego denotaremos como:

$$B(u,v) = \int_0^1 u'v'\, dx \text{ y } F(v) = \int_0^1 fv\, dx \tag{6.4}$$

Es claro que F es lineal y además acotado ya que, aplicando Cauchy-Schwarz tenemos que se cumple:

$$|F(v)| = |\int_0^1 fv| \leq ||F||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||F||_{L^2}||v||_{H^1}, \forall v \in H$$

Lo cual dice que $||F|| \leq ||f||_{L^2}$. Asu vez $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal y también acotado pues usando Cauchy-Sshwarz se obtiene:

$$|B(w,v)| = |\int_0^1 w'v'| \leq ||w'||_{L^2}||v'||_{L^2} \leq ||w||_{H^1}||v||_{H^1}, \forall w, v \in H$$

Por ultimo, deacuerdo al teorema de Poincaré existe un numero real N>0 tal que:

$$B(v,v) = \int_0^1 (v')^2 = ||v'||_{L^2}^2 \geq N||v||_{H^1}^2, \forall v \in H$$

Lo cual demuestra que B es H-elíptica. Asi una aplicación directa del Teorema de Lax-Milgram generalizado nos permite decir que (6.4) tiene una única solución $u \in H_0^1$ la cual satisfface:

$$||u||_{H^1} \leq N^{-1}||F||$$

4.2.6 Formulación variacional de problema de contorno en dimensión dos

4.2.6.1 Problema elíptico de segundo orden

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}$ con frontera $\partial\Omega$. Sea V un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que:

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega)$$

Ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u = f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0, & x \in \Omega \\ u(x,t) = g, & (x,t) \in \Gamma_D \times (0,T) \\ \dfrac{du(x,t)}{dn} = 0, & (x,t) \in \Gamma_N \times (0,T) \end{cases}$$

Siendo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Hallando la forma variacional.

Sea $v \in H^1$ una función suficientemente regular, luego en:

$$u_t - \alpha\Delta u = f$$

multiplicamos por $v \in H^1$ e integramos, obteniendo lo siguiente:

$$\int_\Omega (u_t - \alpha\Delta u)v\,dx = \int_\Omega (f)v\,dx$$

$$\int_\Omega u_t v\,dx - \int_\Omega \alpha(\Delta u).v\,dx = \int_\Omega f.v\,dx$$

$$\textstyle\int_\Omega f.v\,dx = \int_\Omega u_t v\,dx - \alpha[\int_\Omega (\Delta u).v\,dx] \tag{6.5}$$

Aplicando Teorema de Green para la siguiente expresión:

$$\int_\Omega (\Delta u).v\,dx$$

tenemos que:

$$\textstyle\int_\Omega (\Delta u).v\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx \tag{6.6}$$

Luego de (6.5) y (6.6) se tiene:

$$\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega u_t v\,dx - \alpha\left(\int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx\right)$$

$$\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega u_t v\,dx - \alpha \int_{\Gamma_N} \frac{du}{dn} v\,d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_D} \frac{du}{dn} v\,d\Gamma + \alpha \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

Ahora como:

$$\frac{du(x,t)}{dn} = 0, \forall (x,t) \in \Gamma_N \times (0,T)$$

tenemos que:

$$\int_{\Gamma_N} \frac{du}{dn} v \, d\Gamma = 0$$

Asi se obtiene:

$$\int_\Omega fv \, dx = \int_\Omega u_t v \, dx - \alpha \int_{\Gamma_D} \frac{du}{dn} v \, d\Gamma + \alpha \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Si tomamos $v \in V = \{v \in H^1 : v(x,t) = 0, \text{ para } x \in \Gamma_D\}$

Entonces

$$\int_\Omega fv \, dx = \int_\Omega u_t v \, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Tomemos una partición uniforme en (0, T):

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$

por diferencias finitas tenemos: $u_t(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u(x,t-h)}{h}$ donde $h = \dfrac{T}{N}$

Para $t = t_1$:

$\rightarrow u_t(x,t_1) = \dfrac{u(x,t_1) - u(x,t_1-h)}{h} = \dfrac{u(x,t_1) - u(x,0)}{h}$

Sabemos que: u$u(x,0) = u_0(x)$ y denotamos $f_1(x) = f(x,t_1)$, $u_1(x) = u(x,t_1)$ y $v_1(x) = v(x,t_1)$

Así tenemos:

$$\int_\Omega f_1(x) v_1(x) \, dx = \int_\Omega \frac{u_1(x) - u_0(x)}{h} v_1(x) \, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u_1(x) \nabla v_1(x) \, dx$$

Luego tenemos que:

$$\int_\Omega (hf_1 + u_0)(x) v_1(x) \, dx = \int_\Omega (u_1 v_1 + \alpha h \nabla u_1 \nabla v_1)(x) \, dx$$

Ahora si $\psi_1 = hf_1 + u_0$ y $a(u_1, v_1) = \int_\Omega (u_1 v_1 + \alpha h \nabla u_1 \nabla v_1) \, dx$

Entonces:

$\psi(v_1) = \int_\Omega \psi_1 v_1 \, dx$

Además:

$$a(u_1, v_1) = \psi(v_1)$$

Afirmación: ψ es lineal y continua.

En efecto:

Si $\psi_1 \in L^2$ y usando la desigualdad de Schwartz.

$|\psi(v_1)| = |\int_\Omega (hf_1 + u_0) v_1 dx| \leq ||hf_1 + u_0||_{L^2} ||v_1||_{L^2} \leq (||hf_1||_{L^2} + ||u_0||_{L^2}) ||v_1||_{L^2} \leq$

$C||v_1||_{L^2} \leq C||v_1||_{H^1}$

Entonces $|\psi(v_1)| \leq C||v_1||_{H^1}$

Afirmación: $"a(u_1, v_1)"$ es bilineal.

En efecto:

Sea $u, u' \in H'(\Omega); v \in H'(\Omega); n, m \in \mathbb{R}$

Veamos que se cumpla:

$a(nu + mu', v) = na(u, v) + ma(u', v)$

Sabemos:

$$a(nu + mu', v) = \int_\Omega \{(nu + mu')v + \alpha h \nabla (nu + mu') \nabla v\} \, dx$$

$$a(nu + mu', v) = \int_\Omega \{nuv + mu'v + \alpha h [\nabla (nu) \nabla v + \nabla (mu') \nabla v]\} \, dx$$

$$a(nu + mu', v) = \int_\Omega \{nuv + mu'v + \alpha h \nabla (nu) \nabla v + \alpha h \nabla (mu') \nabla v\} \, dx$$

$$a(nu + mu', v) = \int_\Omega \{nuv + \alpha h \nabla (nu) \nabla v + mu'v + \alpha h \nabla (mu') \nabla v\} \, dx$$

$$\imath(nu + mu', v) = n \int_\Omega uv + \alpha h \nabla (u) \nabla v \, dx + m \int_\Omega u'v + \alpha h \nabla (u') \nabla v \, dx$$

$$a(nu + mu', v) = na(u, v) + ma(u', v)$$

De forma analoga se cumple que:

$$a(u, nv + mv') = na(u, v) + ma(u, v'), \forall u, v, v' \in H'(\Omega); n, m \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto se concluye que $"a"$ es bilineal, en particular $"a(u_1, v_1)"$ es bilineal

Afirmación: $"a(u_1, v_1)"$ es acotado.

En efecto:

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_\Omega |u_1 v_1 + \alpha h \nabla u_1 \nabla v_1| \, dx$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_\Omega |u_1 v_1| \, dx + \alpha h \int_\Omega |\nabla u_1 \nabla v_1| \, dx \qquad (6.7)$$

Observacion:

$\int_\Omega |\nabla u_1 \nabla v_1| \, dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v_1|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ por desigualdad de Holder $\nabla u_1, \nabla v_1 \in L^2$

Entonces:

$$\int_\Omega |\nabla u_1 \nabla v_1| \, dx \leq |u_1|_{1,2} |v_1|_{1,2} \leq ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_1 \nabla v_1| \, dx \leq ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1} \qquad (6.8)$$

De forma análoga:

$$\int_\Omega |u_1 v_1| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u_1|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v_1|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = ||u_1||_{L^2} ||v_1||_{L^2} \leq ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1}$$

$$\int_\Omega |u_1 v_1| \, dx \leq ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1} \qquad (6.9)$$

Por lo tanto reemplazando (6.8) y (6.9) en la ecuación (6.7):

$$|a(u_1, v_1)| \leq ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1} + \alpha h ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1} = (1 + \alpha h) ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1}$$

Entonces:

$$|a(u_1, v_1)| \leq (1 + \alpha h) ||u_1||_{H^1} ||v_1||_{H^1}$$

Afirmación: "$a(u_1, v_1)$" es coersiva en H_0^1.

En efecto:

$a(v_1, v_1) = \int_\Omega (v_1^2 + \alpha h|\nabla v_1|^2)\, dx \geq \alpha h \int_\Omega |\nabla v_1|^2\, dx = \alpha h |v_1|_{1,2}^2$

Por la desigualdad de Poincaré generalizado: $|v_1|_{1,2} \geq C||v_1||_{H^1}$

entonces $a(v_1, v_1) = \alpha h C^2 ||v_1||_{H^1}^2$

entonces a(., .) es coerciva.

Por lo tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram garantizamos la existencia y unicidad de la solución u_1 .

Para $t = t_2$:

Entonces

$$u_t(x, t_2) = \frac{u(x,t_2) - u(x, t_2 - h)}{h} = \frac{u(x,t_2) - u(x,t_1)}{h}$$

sabemos que $u(x, t_1) = u_1(x)$ y denotemos $f_2(x) = f(x, t_2)$, $u_2(x) = u(x, t_2)$ y $v_2(x) = v(x, t_2)$

Así obtenemos:

$$\int_\Omega f_2(x) v_2(x)\, dx = \int_\Omega \frac{u_2(x) - u_1(x)}{h} v_2(x)\, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u_2(x) \nabla v_2(x)\, dx$$

Entonces

$\int_\Omega (hf_2 + u_1)(x) v_2(x)\, dx = \int_\Omega (u_2 v_2 + \alpha h \nabla u_2 \nabla v_2)(x)\, dx$

Si $\psi_2 = hf_2 + u_1$, $a(u_2, v_2) = \int_\Omega (u_2 v_2 + \alpha h \nabla u_2 \nabla v_2)\, dx$ y $\psi(v_2) = \int_\Omega \psi_2 v_2\, dx$

$$a(u_2, v_2) = \psi(v_2)$$

de forma análoga de lo probado anteriormente tenemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación: ψ es lineal y continua.

Afirmación: "$a(u_2, v_2)$" es bilineal.

Afirmación: "$a(u_2, v_2)$" es acotado.

Afirmación: $"a(u_2, v_2)"$ es coersiva en H_0^1.

Por lo tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram garantizamos la existencia y unicidad de la solución u_2.

Por lo tanto podemos encontrar de forma recursiva: $u_1, u_2, ..., u_N$ soluciones aproximadas.

4.2.6.2 Algoritmo de Frefem++

FreeFem ++ es un solucionador de ecuaciones diferenciales parciales. Tiene su propio lenguaje. Los scripts freefem pueden resolver sistemas multifísicos no lineales en 2D y 3D.

Los problemas que involucran PDE (2d, 3d) de varias ramas de la física, como las interacciones de estructura de fluidos, requieren interpolaciones de datos en varias mallas y su manipulación dentro de un programa. FreeFem ++ incluye un rápido algoritmo de interpolación y un lenguaje para la manipulación de datos en múltiples mallas.

Ahora se verá el algoritmo de FreFem++ para la ecuación del calor, que tiene como finalidad encontrar la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera lineales elípticos.

Ejemplo: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x}{2})^2 + y^2 < 1, 100x^2 - 60x + 100y^2 > 0\}$

$\alpha = 0,01$, $T = 5$

$f(x, y, t) = (2 + 5\alpha)sen(x).cos(y).exp(t)$

$g = sen(x).cos(y).exp(t)$

$u_0 = sen(x).cos(y)$

Programación usando Frefem++:

Archivo Propa-Calor.edp

```
real pi=4*atan(1.0);

border a(t=0,2*pi)x=2*cos(t);y=sin(t);label=1;
```

```
border b(t=0,2*pi)x=.3+.3*cos(t);y=.3*sin(t);label=2;

mesh thwithhole=buildmesh(a(90)+b(-30));

plot(thwithhole,wait=1);

//plot(Th,wait=1,value=1);

fespace Vh(thwithhole,P1);

Vh u,v,uu,f,g;

real dt=0.1, alfa=0.01;

problem dcalor(u,v) = int2d(thwithhole)( u*v+dt*alfa*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))

+int2d(thwithhole)(- uu*v-dt*f*v) + on(a,b,u=g);

real t=0;

uu=sin(x)*cos(y);

for (int m=0;m<=5/dt;m++)

{

t=t+dt;

f=(2+alfa*5)*sin(x)*cos(y)*exp(t);

g=sin(x)*cos(y)*exp(t);

dcalor;

plot(u,wait=1,value=1);

uu=u;

}

//plot(u,dim=3, wait=1,value=1);

plot(u,dim=3,ps="dcalor.eps");
```

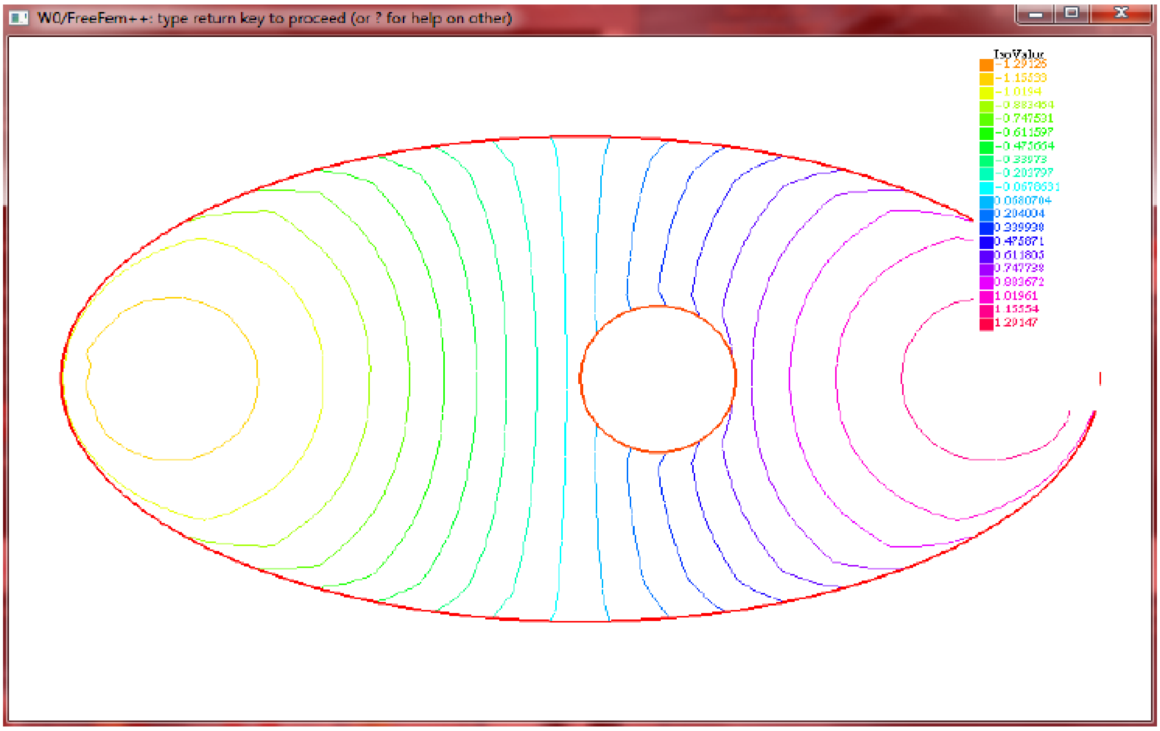

Figura 2: Solución obtenida con Propa-Calor.ed

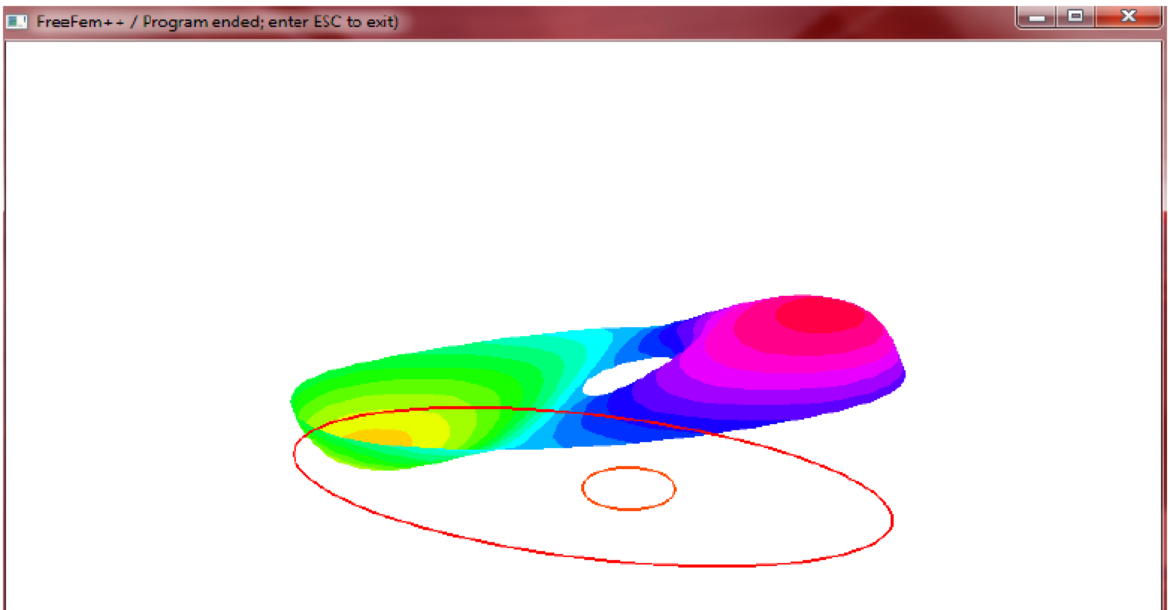

Figura 3: Variación de la temperatura en la lamina o superficie.

V. Discusion de resultados

Con respecto al objetivo que nos planteamos en esta investigación, que es aplicar la generalizacion del teorema de Lax-Milgram en la solucion de problemas de condiciones de frontera lineales elipticos, los resultados muestran que el teorema que una herramienta muy util que permite garantiar las existencia y unicidad de la solucion en la forma variacional estos resultados coinciden con los resultados obtenidos en otras investigaciones, por ejemplo Gil (2016), el cual constato que se pudo comprobar que el Teorema de Lax-Milgram tiene aplicación, pues a pesar de ser un teorema proveniente de la consecuencia del Análisis funcional, su aplicación a las ecuaciones diferenciales facilitan hallar una única solución a estas, sin embargo de igual forma generaliza el Teorema de Representación de Riesz a cualquier forma sesquilineal.

VI. Conclusiones

- Se verifica que la aplicación de la Generalización del Teorema de Lax-Milgram en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos es una herramienta muy útil que permite garantizar la existencia y unicidad de la solución como se muestra en la presente investigación.

- Se presenta los principales tópicos afines en relación a la Generalización del Teorema de Lax-Milgram en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos.

- Se analiza las condiciones que deben de cumplirse en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos de la Generalización del Teorema de Lax-Milgram.

- Se demuestra la Generalización del Teorema de Lax-Milgram en la solución de problemas de condiciones de frontera lineales elípticos.

VII. Recomendaciones

Este método es aplicable a problemas de condiciones de frontera lineales elípticos se recomienda que haya una mejora del mismo, para investigaciones futuras relacionadas con este tema. Se recomienda aplicar la Generalización del Teorema de Lax-Milgram en otro tipo de problemas y analizar las nuevas restricciones que se necesitaría para su aplicación y así extender el método a nuevos horizontes.

VIII. Referencias

[1] Álvarez, D. (s.f.). *El Teorema de Lax-Milgram, Generalizaciones y Aplicaciones.*

[2] Antunez, M. (2009). *Una adecuada curricular para las funciones generalizadas* (Tesis de maestría), Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Honduras.

[3] Adams, R. y Fourier, J. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, Amsterdam.

[4] Brézis, H. (1983). *Análisis funcional Teoría y Aplicaciones*, Paris.

[5] Calderón, G. y Gallo, R. (2011). Introducción al Método de los Elementos Finitos: un enfoque matemático, Universidad de los Andes. Caracas, Venezuela.

[6] Chamorro, D. (2010). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador.

[7] Chumpitaz, M. (s.f.). *Análisis Funcional*, Universidad Nacional de Ingenieria. Lima, Perú

[8] Clapp, M. (2010). *Introducción al Análisis Real*, Universidad Nacional Autónoma de México. México,

[9] Fernández, C. (s.f.). *Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Facultad de Matemática, Universidad de Sevilla.

[10] Ferragut, L. y Asensio, M. (2007). *Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales.*

[11] Gatica G. (2012a). *Análisis Numérico de EDPs. El Método de Elementos Finitos Mixtos*, Universidad de Concepción.

[12] Gatica, G. (2012b). *Introduccion al analisis funcional: teoria y aplicaciones. Parte 1*, Universidad de Concepción. Chile.

[13] Gatica, M. (2011). *Espacios de funciones: Una introducción a los espacios de Sobolev* (Tesis de licenciatura), Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela.

[14] Gil, E. (2016). *El teorema de Lax-Milgram y una aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales (Tesis de licenciatura)*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

[15] Gomez, J. y Granero, R. (s.f.). *Estudio de dos ecuaciones parabólicas lineales con métodos de energía*, http://www.icmat.es/seminarios/SM/es/, Madrid.

[16] Gonzales, H. (2006). *Reflexividad y Separabilidad de los espacios* L^p.

[17] Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). México: McGraw-Hill interamericana.

[18] kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, New York.

[19] Kolmogorov, A. y Fomin, S. (1970). *Introductory Real Analisys*, New York, Dover Publications.

[20] Macho, S. (2007). *Topología de Espacios Metricos*, Managua.

[21] Miana, P. (2006). *Curso de Análisis funcional*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

[22] Ortiz, A. (2010). *ϕ-Espacios de funciones: algunas contribuciones*. Lima, Perú.

[23] Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2da edición). University of Wisconsin, New York: McGraw-Hill.

[24] Sánchez, H. y Reyes, C. (2015). *Metodología y diseños en la investigación científica*. Lima, Perú.

[25] Solín, P. (2006). *Partial Differential Equations and the finite Element Method*, John Wiley y Sons, Ltd 2006.

[26] Treves, F. (1967). *Topological Vector Spaces, Distribuciones and Kernels,* Academic press , New York.

[27] Valenzuela, H. (2001). Distribuciones. Funciones de Green y aplicaciones (Tesis de licenciatura), Universidad de Sonora. México.

[28] Wawrzynczyk, A. (1993). *Introdución al Análisis Funcional*, Universidad Autonoma Metropolitana.

[29] Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*, Berlin Heidelberg - New York.