Universidad Nacional
Federico Villarreal

Vicerrectorado de
INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

PROPUESTA DE ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE OFERTA Y DEMANDA GENERALIZADA

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:
Zárate Livia, Víctor Franciscolli

Asesor:
Mg. Quicaño Barrientos, Carlos

Jurados:
Dr. Anaya Calderón, Agustín E.
Dra. Luján Campos, Yrma
Mg. Aguado Lingán, Mónica A.

Lima – Perú
2019

ÍNDICE

RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis fue presentar un algoritmo para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias, tanto para lineales o no lineales.

Este algoritmo se utilizó para resolver el modelo logístico de orden fraccional para la interacción de la oferta y demanda generalizada, que es un modelo basado en el Cálculo Fraccional.

Es por ello que en principio se ha desarrollado la definición de la Derivada Fraccionaria, la más popular que es la de Riemann-Liouville y sus propiedades. Asimismo, se desarrolló la derivada fraccional del tipo Caputo, ya que esta es preferida para los modelos.

Y para finalizar presentaremos el algoritmo para resolver mediante métodos numéricos la solución del sistema de oferta y demanda generalizada.

PALABRAS CLAVES:

- Cálculo fraccional
- Derivada Riemann-Liouville
- Derivada de Caputo
- Oferta y demanda generalizada
- Métodos numéricos en el cálculo fraccional

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to present a new algorithm for the solution of systems of fractional differential equations, for both linear and nonlinear.

This algorithm was used to solve the Fractional-Order Logistic Model for the interaction of demand and supply, which is a model based on the Fractional Calculus.

That is why in principle the definition of the Fractional Derivative has been developed, the most popular being that of Riemann Liouville and its properties. Moreover, it has been developed the Fractional Derivative of the Caputo type, as this is preferred for models.

And finally, we are going to present the algorithm to solve by means of numeric methods the solution of the generalized system of supply and demand.

KEY WORDS:

- Fractional calculus
- Riemann Liouville derivative
- Caputo derivative
- Generalized supply and demand
- Numerical methods in the fractional calculus

I. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de derivadas e integrales son familiares para todo aquel que ha estudiado cálculo elemental. Se sabe que si $f(x)=x^2$, entonces la "primera derivada" es $2x$ y su "segunda derivada" sería 2. Sin embargo, que sucedería si quisiéramos encontrar 1/2 o 1/5 de derivada? ¿Cómo se definiría la derivada de este tipo?

El cálculo fraccional es una rama de la matemática que investiga las propiedades de las derivadas e integrales de orden no entero. En particular la disciplina envuelve la noción y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que envuelve derivadas de orden fraccionario de la función desconocida (llamadas ecuaciones diferenciales fraccionarias).

La historia del cálculo fraccional empieza a la misma vez que el cálculo clásico fue establecido. Esto fue mencionado en una carta de L'Hospital a Leibniz en 1695, preguntándole sobre el significado de $\frac{d^n y}{dx^n}$ cuando n = 1/2.

Existen muchas definiciones de la derivada fraccionaria, pero en este trabajo vamos a considerar las definiciones más conocidas como la de Riemann-Liouville y la de Caputo. Presentando el termino integro-diferencial, el cual significa, ambos, derivada e integral de orden fraccionario. La derivada e integral fraccionaria actualmente está experimentando un gran auge con los conceptos de cálculo fraccional, que constituye un lugar de encuentro de muchas disciplinas, como la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, las ecuaciones diferenciales integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico. Cabe recalcar que es de mayor interés el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Estos operadores fraccionarios pierden algunas propiedades fundamentales, como, por ejemplo, que la derivada de una constante ya no es cero y en la interpretación física, no existe interpretación geométrica de las derivadas fraccionarias. Pero la importancia, a pesar de estas dificultades, reside en que los operadores ordinarios “son locales”, mientras que los operadores de orden fraccional son “no locales” e incorporan a la modelización efectos de memoria y contribución. Cuando estos modelos empiezan a aparecer, también aparecen varios tipos de métodos numéricos para la solución de estos sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccional sean lineales o no lineales.

Es por ello aquí se busca proponer un algoritmo para la solución numérica del sistema de oferta y demanda generalizada, donde la ventaja es su facilidad de manipulación, respecto a otro algoritmo, ya que usa la “regla del trapecio” y el “método de Cauchy” (métodos conocidos), y veremos como ellos serán llevados a ordenes no enteras.

En el capítulo I se abordará algunas definiciones de derivada fraccionarias, como la que obtuvo Lacroix, Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo. Asimismo, las propiedades de estos operadores sobre todo de Riemann-Liouville y Caputo.

En el capítulo II tratará de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, con un tipo de derivada específica, y se explica por qué usamos este tipo de derivada y también se mencionará los teoremas de existencia y unicidad para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

En el capítulo III corresponde a los métodos numéricos que necesitamos para la elaboración del algoritmo que resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales o no, como también se presentará el sistema de oferta y demanda generalizada.

Y, finalmente, en el capítulo IV se aplicará el algoritmo propuesto en la solución numérica del sistema de oferta y demanda generalizada, cuyos resultados obtenidos demostrarán que este algoritmo puede ser utilizado en lugar del Método PECE (*Predictor-Evaluate-Corrector-Evaluate*), que es una generalización del método de Adams-Bashforth-Moulton.

1.1 Descripción y formulación del problema

El método PECE (Predictor-Corrector-Evaluate-Corrector), resuelve el modelo logístico de orden fraccional para la interacción de oferta y demanda, este algoritmo resuelve sólo sistemas no lineales, pero tiene la dificultad de que el algoritmo es muy extenso. Es por ello que esta tesis busca usar un algoritmo que sea más simple y con la ventaja de que sirva para resolver modelos lineales y no lineales.

1.1.1 Problema principal

¿De qué manera un algoritmo permite resolver el modelo logístico para la interacción de oferta y demanda generalizada?

1.2 Antecedentes

"Es gradualmente reconocido que las ideas de la teoría dinámica compleja son útiles para economistas y financistas. En efecto, alrededor de 1950, Richard Goodwin usó técnicas no lineales en el estudio de la dinámica de procesos económicos. Con el progreso de lo investigado en sistemas complejos, algunos conceptos y métodos en dinámica no lineal tal como estabilidad, bifurcación, catástrofe y caos, etc. Llegan a ser aplicados para problemas económicos y algunos resultados están archivados en la pasada década. La dinámica no lineal llega a ser una importante aproximación para el análisis económico." (EL-SAKA,2012)

"El uso de operadores fraccionarios en modelos matemáticos ha ido incrementando en recientes años. Un sistema de ecuaciones diferenciables de orden ordinario de la "oferta y demanda" está hecho de una manera local. A cambio, los operadores fraccionarios son "no locales", esto es que incorporan a la modelización los efectos de memoria y contribución de muchas escalas espaciales." (EL-SAKA,2012)

Hablamos de "no localidad" cuando lo que ocurre en un punto del espacio o en un instante de tiempo depende de un promedio en un intervalo que contiene al punto o al instante. Así, los efectos no locales en el espacio pueden definirse como interacciones de largo alcance (varias escalas de espacio), mientras que los efectos no locales en el tiempo se conocen como efectos con memoria.

Un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarios es del tipo Adams propuesto por Kai Diethelm (Bhalekar y Daftardar, 2011). El método PECE (*Predictor, Evaluate, Corrector*, *Evaluate*) es una generalización del clásico Adams-Bashforth-Moulton, y es con este método con el que se solucionan las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario no lineales.

Existen una cantidad de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales fraccionarias; sin embargo, muchos de estos métodos son muy usados para determinados tipos de ecuaciones diferenciables de orden fraccionario (frecuentemente ecuaciones lineales o de pequeñas clases). El método PECE utiliza la "regla del trapecio fraccional" y la generalización de la fórmula de Taylor, es decir "la fórmula de Taylor Fraccional".

Los detalles del análisis del método generalizado de Adams (método PECE) para ecuaciones diferenciales lo podemos encontrar en el trabajo de Kai Diethelm y que fue profundizado por N. H. Sweilam en su investigación "*Numerical simulation for variable – order fractional nonlinear delay differential equations*" (2015) donde, incluso, analiza el error del algoritmo de Kai Diethelm.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Desarrollar y programar un algoritmo que permita resolver el modelo logístico para la interacción de oferta y demanda generalizada.

1.3.2 Objetivos Específicos

Desarrollar la integración fraccionaria de Riemann-Liouville.

Desarrollar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la de Caputo.

Desarrollar el algoritmo para la resolución del modelo logístico de orden fraccional para la interacción de oferta y demanda generalizada.

Programar el algoritmo en un lenguaje de programación para resolver el modelo.

1.4 Justificación

La presente investigación se justifica pues simplifica el método PECE (Predictor-Corrector-Evaluate-Corrector), por otro algoritmo que nos permite sintetizar la solución numérica del modelo logístico de orden fraccional para la interacción de oferta y demanda generalizada.

El presente trabajo desarrolla un modelo en ecuaciones diferenciales fraccionarios, que a diferencia de los modelos ordinarios es que es" no local", por eso es muy importante conocer este tipo de derivadas ya que es muy distinto a los modelos que conocemos.

También busca fomentar un lado aplicativo del cálculo fraccional, en los diversos campos de ciencias que hay, específicamente en el área de la economía.

Nace de la necesidad de utilizar matemática especializada para un mejor entendimiento de los problemas, y dar a conocer la gran importancia que tiene utilizar modelos fraccionarios en lugar de modelos ordinarios.

1.5 Hipótesis

1.5.1 Hipótesis principal

El algoritmo propuesto permite la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y resuelve el modelo logístico de orden fraccional para la interacción de oferta y demanda generalizada.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Cambio de orden de integración

Definición 1

Es un método que sirve para cambiar el orden de integración de las integrales definidas. La siguiente fórmula sostiene que, para toda función $f(t, t_1, t_2)$, integrable con respecto a t_1 y t_2, podemos manipularla de la siguiente manera

$$\int_a^t \int_a^{t_1} f(t, t_1, t_2)\, dt_2 dt_1 = \int_a^t \int_{t_2}^t f(t, t_1, t_2)\, dt_1 dt_2$$

(Kisela, 2008).

El cambio de orden de integración es algo que usaremos, por ejemplo, en la “fórmula de Cauchy” que nos permite definir la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, como también lo usaremos en una propiedad de la “integral fraccionaria de Riemann-Liouville”

$$(I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f)$$

2.2 Derivada de integrales dependiendo de un parámetro

Definición 2

La función $g(t, t_1)$ es integrable con respecto a la segunda variable, esta derivada $\frac{\partial}{\partial t} g(t, t_1)$ es continua y $g(t, t_1)$, es definida en el punto (t, t).

$$(2.1) \qquad \frac{d}{dt} \int_a^t g(t, t_1) dt_1 = g(t, t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t, t_1) dt_1$$

En calculo fraccional frecuentemente se usa con funciones del tipo

$g(t, t_1) = (t - t_1)^r f(t_1)$ para algún $r \geq 0$ (Kisela, 2008).

Así veremos los resultados en cada situación. El caso $r = 0$ es trivial (simplemente obtenemos f (t)). En otro caso conseguimos la fórmula (2.1) cuando $g(t, t)=0$ para todo t.

$$(2.2) \qquad \frac{d}{dt}\int_a^t (t-t_1)^r f(t_1)dt_1 = r\int_a^t (t-t_1)^{r-1} f(t_1)dt_1$$

2.3 Función Gamma

Definición 3

La función Gamma completa $\Gamma(x)$ juega un rol importante en la teoría de diferintegración.

$$(3.1) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

El exponencial garantiza la convergencia de esta integral. Obviamente ocurre en el plano complejo Z de la mitad de la derecha del plano complejo (Re(z) > 0).

Otra generalización de la otra mitad puede ser obtenido del siguiente modo: sustituyendo e^{-t} por el siguiente límite $e^{-t} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, entonces usamos n-veces la integración por partes obtenemos el siguiente límite:

$$(3.2) \qquad \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

Incluso si esta expresión fue derivada para *Re(z) > 0*, es posible utilizarla como una definición de la función Gamma en puntos con parte real, excepto en enteros negativos.

La función Gama es definida para $z \in C-\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, es sin embargo en el sentido del análisis complejo, los enteros negativos son simplemente polos de $\Gamma(z)$.

Hay muchas formas para definir la inversa de la función Gamma simple mente por

$$(3.3) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)}{n!n^z}$$

De esta forma evitamos el problema con los enteros negativos, es decir, la función $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es definida para todo complejo, especialmente para valores reales.

De (3.1) integrando por partes tenemos $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ . . . . . . (i)

A pesar que derivamos solo para puntos en la mitad derecha en el plano complejo, esta sigue de (3.3) que esta fórmula sostiene más general incluso para puntos z, para el cual, $-m < Re(z) \leq -m + 1$, donde $m \in N$ desde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}$$

La fórmula inmediatamente implica que es posible calcular todos los valores de la función Gamma. Si nosotros sabemos estos valores; por ejemplo (0, 1), es natural la conexión entre función Gamma y la factorial, esto es por (i) y por el hecho $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(n + 1) = n!$ $\forall n \in N$ (Oldham and Spainer, 1974).

2.4 Función Beta

Definición 4

La función Beta es muy importante para el cálculo de la derivada fraccional de la función exponencial. Está definido por una integral, la definición es dada por

Sea z,w, tal que $Re(z) > 0$ y $Re(w) > 0$

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

Si usamos la convolución de la transformada de Laplace, conseguimos una relación entre la función Gamma y una función Beta.

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$
$$B(z,w) = B(w,z)$$

(Kimeu, 2009).

2.5 Función Mittag-Leffler

Definición 5

La función exponencial e^z es muy importante en la teoría de las ecuaciones ordinarias de orden entero, se puede escribir

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}$$

La generalización de esta función es llamada Mittag-Leffler, que en nuestro trabajo juega un importante papel en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Sea $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

(Velasco, 2008).

Para casos especiales

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{sinh(z)}{z}$$

Para un parámetro se tiene

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

2.6 Derivada de Lacroix

Definición 6

Se tiene la siguiente función potencia $y=x^N$, se comprueba. Para toda α > 0,

$$D^{\alpha}x^{N} = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-\alpha+1)x^{N-\alpha}}$$

(Sánchez, 2011)

2.7 Derivada generalizada

Definición 7

Consideremos un número natural n ∈ N, entonces se tiene

$$D^{n}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f(x+(n-k)h)$$

(Introductory Notes en fractional Calculus,2006)

2.8 Binomio generalizado de Newton

Definición 8

$$(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}a^{\alpha-k}b^{k}$$

Donde $|b| < a$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $Re(\alpha) > 0$.

(Introductory Notes en fractional Calculus,2006).

2.9 Derivada Grunwald-Letnikov

Definición 9

$$D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}f(x+(\alpha-k)h)$$

Donde $h = \dfrac{x-a}{N}$

(Introductory Notes en fractional Calculus,2006).

2.10 Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

2.11 Definición 10

Supongamos que $\alpha > 0, t > 0, \alpha, t \in R$, entonces el operador fraccional es llamado como la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α .

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \forall\alpha > 0$$

(Munkhammar, 2004)

Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 11

La derivada de Riemann-Liouville de orden $\alpha > -1,\ \alpha \in \mathbb{C},\ m = Re(\alpha) + 1$

$$D^{\alpha}f = D^{m}I^{m-\alpha}f$$

Donde $m - 1 < \alpha < m$ y m es un entero positivo.

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha}f(t) + \mu D^{\alpha}g(t)$$

(Li, C., Qian, D., and Chen, 2011).

2.12 Derivada fraccionaria de Caputo

Definición 12

Sea $\alpha > 0$, la derivada de Caputo es $D_*^{\alpha}f = I^{m-\alpha}D^{m}f$

Donde $m - 1 < \alpha < m$; m es entero positivo.

$$D_*^{\alpha}f(t) = 0,\ \text{donde}\ f(t) = cte.$$

(Li, C., and Deng, W. 2007).

2.13 Problema de valor inicial

Definición 13

$$D_*^{\alpha} f(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0$$

Donde el orden de la derivada es $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$.

(Li, C., and Zeng F. 2015)

2.14 Teorema de existencia

Definición 14

Asumimos que $D := [0, x^*] \times [y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$, con algún $x^* > 0$ y algún $\delta > 0$ y si la función f : D→R continua. Por tanto, definimos

$$X := min\{x^*, (\delta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|}_{\infty})^{1/\alpha}\}$$

Entonces existe y:[0, X] → R que resuelve el P.V.I.

(Li, C. and Zeng F. 2015)

2.15 Teorema de unicidad

Definición 15

Asumamos que Por $D = [0, x^*] \times [y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$ con $x^* > 0$ y $\delta > 0$. tanto, si la función f : D→R es acotado en D y cumple la condición de Lip-schitz con respecto a la segunda variable, es $|f(t,a) - f(t,b)| \leq L\,|a - b|$. decir,

Con L > 0 constante, independiente de t, a y b, entonces denotamos

$$X := min\{x^*, (\delta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|}_{\infty})^{1/\alpha}\}$$

Ahí existe por lo menos una función y : [0, X] → R que resuelve el problema de valores iniciales.

(Li, C.and Zeng F. 2015).

2.16 Generalización del teorema del valor medio

Definición 16

Supongamos $f(x) \in C[0,a]$ y $D^{\alpha} f(x) \in C(0,a]$ para $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$f(x) = f(0^{+}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(D^{\alpha} f)(\psi) x^{\alpha}$$

Con $0 \leq \psi \leq x$, $\forall x \in (0,a]$.

(Mohamed and Mahmoud, 2013)

2.17 Generalización de la regla de Taylor

Definición 17

Supongamos que , $D^{k\alpha} f(x) \in C(0,a]$ para $k = 0, 1, \ldots, n+1$ donde se considera un valor de α, en el intervalo 0 < α ≤ 1, luego tenemos lo siguiente:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{in}}{\Gamma(i\alpha+1)}(D^{i\alpha} f)(0^{+}) + \frac{(D^{(n+1)\alpha} f)(\psi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} x^{(n+1)\alpha}$$

Donde $0 \leq \psi \leq x$ $\forall x \in (0,a]$.

(Trujillo, Rivero and Bonilla, 1999).

2.18 Método de Euler

Definición 18

Sea el siguiente problema de valores iniciales.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y(0) = y_0$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Donde $h = x_{i+1} - x_i$.

(Rida, Khalil, Hosham and Gadellah, 2014)

2.19 Método de Euler generalizado

Definición 19

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, y(t_j))$$

Donde j = 0, 1, 2, 3, . . ., k − 1

Claramente si α = 1 obtenemos el método de Euler usual, además encontramos la solución en un subintervalo [0, a] subdividido en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ de igual longitud $h = \frac{a-0}{k}$, usando los nodos $t_j = jh$. Con $y(t)$, $D_*^\alpha y(t),\ D_*^{2\alpha} y(t)$ continuos en [0, a].

(Rida, Khalil, Hosham and Gadellah, 2014)

2.20 Regla del trapecio

Definición 20

$$\int_a^b dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

2.21 Regla del trapecio fraccional

Definición 21

Sea el intervalo [0, a] subdividido en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$, donde $h = \frac{a}{k},\ t_j = jh$ para a>0 y α > 0

$$[I^\alpha f(t)](a) = T(f,h,\alpha) - E_T(f,h,\alpha)$$

$$T(f,h,\alpha) = ((k-1)^{\alpha+1} - (k-\alpha-1)k^\alpha)\frac{h^\alpha f(0)}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^\alpha f(a)}{\Gamma(\alpha+2)} + \sum_{j=1}^{k-1}((k-j+1)^{\alpha+1} - 2(k-j)^{\alpha+1} + (k-j-1)^{\alpha+1})\frac{h^\alpha f(t_j)}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Claramente, si α = 1 se llega a la regla del trapecio usual.

Si $f(t) \in C^2[0, a]$ hay una constante C_α dependiendo solo de α, así que el error E_T *(f, h, α)*

$$|E_T(f,h,\alpha)| \le C_\alpha \left\| f'' \right\|_\infty a^\alpha . h^2$$

(Odibat and Momani, 2008)

2.22 Algoritmo para una ecuación

Definición 22

Si el problema de valores iniciales $D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$, $t > 0.$

Cuya solución es $y(t) = I^{\alpha} f(t, y(t)) + y(0)$

El algoritmo para la solución numérica de este P.V.I es

$$y(t_j) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}((j-1)^{\alpha+1} - (j-\alpha-1)j^{\alpha} f(t_0, y(t_0)) + y(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum_{i=1}^{j-1}((j-i+1)^{\alpha+1} - 2(j-i)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1}) f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_j, y(t_{j-1}) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_{j-1}, y(t_{j-1}))$$

Donde [0, a] es el intervalo en el cual se encuentra la solución. [0, a] se divide en k subintervalos $[t_j , t_{j+1}]$ de igual longitud $h=\frac{a-0}{k}$, usando los nodos $t_j=jh$ para j =0, 1, 2, … ., k. *(Odibat and Momani, 2008).*

2.23 Modelo logístico de orden fraccional

Definición 23

Sea a,b ≥ 0, α ∈ (0, 1] $C = \frac{M_d}{M_s}$

Donde:

M_d es la subcapacidad para la potencial demanda.

M_s es la subcapacidad para la potencial oferta.

Este modelo determina la evolución de una potencial demanda y una potencial oferta

$$D_*^{\alpha} y_1(t) = ay_1(1 - \frac{c.y_1}{2y_2} - \frac{y_1}{2})$$
$$D_*^{\alpha} y_2(t) = by_2(1 - \frac{y_2}{2.c.y_1} - \frac{y_2}{2})$$

(Mohamed and Mahmoud, 2013)

INTRODUCCIÓN AL CALCULO FRACCIONAL

2.24.1 Derivada generalizada de la función exponencial

En 1819, Sylvestre Francois Lacroix, en su obra titulada "*Traité du calcul Différentiel et du Calcul Integral*" hizo la primera discusión de una derivada de este tipo.

De las 700 páginas del texto, solo dos páginas fueron escritas acerca del cálculo fraccional. Lacroix calculó la derivada fraccionaria para una función de la forma $y = x^N$. Fue el primero en afirmar que la derivada fraccionaria de una constante es diferente a cero, salvo que sea el mismo cero. Este resultado obtenido por Lacroix, en la manera típica de los formalistas de esa época, es el mismo mostrado hoy por la definición de una derivada de orden arbitrario de Riemann-Liouville. El método de Lacroix no ofrece ninguna pista para la aplicación de una derivada de orden arbitrario (Sánchez, 2011)

$$D^\alpha x^N = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-\alpha+1)} x^{N-\alpha} \tag{1}$$

Prueba: Lacroix partió de $y = x^N$ y calculó la n-ésima derivada:

$$y = x^N$$

$$y' = Nx^{N-1} \tag{1.1}$$

$$y'' = N(N-1)x^{N-2} \tag{1.2}$$

$$y''' = N(N-1)(N-2)x^{N-3} \tag{1.3}$$

Y así sucesivamente llegamos para un cierto n natural.

$$y^{(n)} = N(N-1)(N-2)(N-3)....(N-(n-1))x^{N-n}$$

$$y^{(n)} = \frac{N!}{(N-n)!} x^{N-n} \tag{1.4}$$

Ahora la función Gamma nos ayuda a generalizar la idea de una factorial entera a un real del siguiente modo:

$$D^\alpha x^N = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-\alpha+1)} x^{N-\alpha} \blacksquare$$

Este resultado es válido para todo α y para N > −1.

Históricamente, la fórmula anterior fue importante para conseguir las bases de la derivación fraccional, tal como fue desarrollada por Gemant (1936). Esta fórmula fue usada por él, y después más difundida por Scott Blair (1947).

La derivada generalizada falla para $N \leq -1$ porque la función Gamma en todo entero negativo y en el cero es divergente.

$$D^{\alpha} x^{N} = \infty \ , \ N \leq -1 \text{ para todo } \alpha.$$

(Oldham and Spainer, 1974)

2.24.2 Derivada generalizada

Antes de presentar la construcción de Grunwald Letnikov, primero vamos a generalizar para un $n \in \mathbb{N}$ la definición clásica de la derivada que es mediante el límite. La prueba se hará mediante inducción.

$$(2) \qquad D^{n} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} f(x + (n-k)h)$$

Prueba: Se tiene lo siguiente

Si $n = 1$

$$(2.1) \qquad D^{1} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si $n = 2$

$$(2.2) \qquad D^{2} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-2} [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]$$

Si $n = 3$

$$(2.3) \qquad D^{3} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-3} [f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)]$$

Consideremos valido para cierto $n \in \mathbb{N}$, (hipótesis inductiva), y hagamos que cumpla para "n + 1".

$$(2.4) \qquad D^{n+1} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{D^{n} f(x+h) - D^{n} f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} f(x + h + (n-k)h) - \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} f(x + (n-k)h)}{h}$$

Como la resta y producto son continuos, podemos sacar límites.

$$= \lim_{h \to 0} h^{-n-1} [\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + h + (n-k)h)}_{\alpha} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)h)}_{\beta}]$$

En (α) agregamos a la suma por convenio, hagamos $\binom{n}{n+1} = 0.$

(2.4.1) $$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n+1-k)h)$$

En (β) hacemos cambio de variable k = ν − 1, nos queda

(2.4.2) $$\sum_{v=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{v-1} f(x + (n+1-v)h)$$

Consideremos por convenio agregar $\binom{n}{-1} = 0$, y multiplicando por -1

(2.4.3) $$\sum_{v=0}^{n+1} (-1)^{v} \binom{n}{v-1} f(x + (n+1-v)h)$$

Reemplazamos (α) y (β) en (2.4) y factorizamos

(2.5) $$D^{n+1} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-(n+1)} [\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k f(x+(n+1-k)h)[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}]]$$

(2.6) $$D^{n+1} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-(n+1)} [\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k f(x+(n+1-k)h)\binom{n+1}{k}] \blacksquare$$

Observación: en los extremos no aplicamos la propiedad de combinatoria.

$$1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n+1} + \binom{n}{n} = 0 + 1$$
$$1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} + \binom{n}{-1} = 1 + 0$$

Y estos se obtuvieron por el convenio, así queda demostrado (2). Luego de haber generalizado para un cierto n ∈ N, vamos a llevar el n ∈ N hacia un α real o complejo, tal que Re(α) > 0. La expresión (2) es equivalente a la siguiente expresión:

$$D^n f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh)$$

2.24.3Derivada Grunwald Letnikov

Para lo que viene tomamos en consideración *f* (t) ∈ C^m [0, t], donde m − 1 < α < m ∈ Z+. Entonces, la definición de derivada fraccionaria que presentaremos es del tipo Grunwald Letnikov dada por el límite. Esta expresión en límite no es conveniente para un uso calculativo. (*Li, C., and Deng, W., 2007)*

Por otro lado, a lo que se dice que la aproximación no es conveniente para su uso, está el hecho de que las aproximaciones numéricas convienen a este tipo de derivada.

(Li, C., Qian, D., and Chen, Y. 2011)

$$(3) \qquad D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + (\alpha - k)h)$$

Prueba: Se tiene de lo probado en (2).

$$(3.1) \qquad D^{n} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n - k)h)$$

$$(3.2) \qquad D^{n} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k} f(x)$$

Donde, el operador E es el operador de traslación definido como E^k *f(x) = f(x+kh)* y además

$(-1+E)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k}$, que es el binomio de Newton.

$$(3.3) \qquad D^{n} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} (E - 1)^n f(x)$$

Intercambiamos *n = α ∈ C, Re(α) > 0*

$$(3.4) \qquad D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} (E - 1)^{\alpha} f(x)$$

Y usando binomio de Newton generalizado; finalmente, se pudo extender para todo

α ∈ C Re(α) > 0 α ≠ −1, −2, −3, . . .

$$(3.5) \qquad D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} E^{\alpha-k} f(x) \blacksquare$$

La ecuación (3) es llamada ecuación diferintegral, ya que combina ambos operadores, derivadas e integrales para diversos valores de α.

La siguiente expresión de la derivada de Grunwald-Letnikov es frecuentemente adoptada.

$$(4) \qquad D^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \left(D^{k} f(t)\right)\Big|_{t=0} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} D^{m} f(\tau) d\tau$$

Donde $m - 1 \leq \alpha < m \in Z+$.

2.24.4 Aproximación de Riemann-Liouville

Como ya se ha mencionado, trabajar con la derivada de Grunwald-Letnikov definida como el límite no es conveniente. La solución es la derivada de Riemann-Liouville.

Antes de dar la definición de la derivada de Riemann-Liouville, primero necesitamos definir lo que es la integral fraccionaria ya que de ahí podemos definir la derivada en función de esta integral. La definición más frecuentemente encontrada de una integral de orden fraccionario es llamada la integral de Riemann- Liouville (Oldham and Spainer, 1974)

2.24.5 Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

> "Una rigurosa investigación fue primero llevada afuera por Liouville en una serie de *papers* desde 1832−1837, donde fue el primero que definió la primera integral de orden fraccionario. Después de investigaciones y futuros desarrollos, entre otros Riemann dejó para la construcción de la integral fraccionaria basándose en el operador integral fraccionario de Liouville, el cual es una valorable pieza clave para el cálculo fraccional" (Munkhammar, 2004).

Supongamos que $\alpha > 0, t > 0, \alpha, t \in R$, entonces el operador fraccional es llamado como la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α (Istheva, 2005).

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Donde es definida $\forall\alpha > 0$,$x > 0$.La demostración podemos obtenerla dando valores negativos a la derivada generalizada de Grunwald-Letnikov, dada en la ecuación n°2.

Para la siguiente demostración, se utilizará la fórmula de Cauchy para la integración repetida, generalizándola hacia un *n* entero para luego llevarla a un número real positivo α, y esto será gracias a la función Gamma y a la propiedad $\Gamma(n+1) = n!$

(5) $$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

Prueba:Ver [7]

(5.1) $$D^{-1} f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(5.2) $$D^{-2} f(x) = \int_0^x \int_0^t f(t_1)dt_1 dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

(5.3) $$D^{-3} f(x) = \int_0^x \int_0^t (t-t_1)f(t_1)dt_1 dt = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

En general, para un número cualquiera se prueba por inducción que

(5.4) $$D^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

La fórmula en (5.4) puede ser probada por la ayuda de inducción matemática.

Si n = 1 el resultado es obvio.

Supongamos válido para cierto *n* (hipótesis inductiva). Veamos que cumpla para n + 1.

$$I^{n+1} f(x) = I(I^n f(x)) = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-t_1)^{n-1} f(t_1)dt_1 dt$$

Luego al hacer cambio de orden de integración tenemos

$$I^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \int_{t_1}^x (t-t_1)^{n-1} f(t_1)dt dt_1$$

Finalmente, operamos la integral que está dentro. Nos quedará

$$I^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t_1)^n f(t_1)dt_1$$

Esto prueba la inducción. Al usar la función Gamma para extenderlo tenemos

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \blacksquare$$

Se llama la integral fraccionaria de Riemann Liouville *para* todo $\alpha > 0$, $x > 0$. La única propiedad de la función $f(x)$ que se usará en la prueba será que es integrable. Ningunas otras restricciones serán impuestas.

2.24.6 Propiedades del operador I^{α}

Por convención $\mathrm{I}^0 f(x) := f(x)$

Es decir, I^0 es el operador identidad.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) $$I^{\alpha}(f+g) = I^{\alpha} f + I^{\alpha} g$$

(2) $$I^{\alpha}(\lambda f) = \lambda I^{\alpha} f$$

De (1) y (2) se demuestra que el operador I^{α} es lineal.

(3) $$I^{\alpha} x^N = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+\alpha+1)} x^{\alpha+N}$$

Prueba

De la integral de Cauchy tenemos lo siguiente:

$$I^1 x^N = \int_0^x x_0^N \, dx_0 = \frac{x^{N+1}}{N+1}$$
$$I^2 x^N = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} x_0^N \, dx_0 = \frac{x^{N+2}}{(N+1)(N+2)}$$
$$I^3 x^N = \int_0^x dx_3 \int_0^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} x_0^N \, dx_0 = \frac{x^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)}$$

En general se verifica por inducción lo siguiente:

$$I^n x^N = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \int_0^{x_{n-2}} \cdots \int_0^{x_1} x_0^N \, dx_0 = \frac{x^{N+n}}{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}$$

utilizando la función Gamma se llega a lo pedido en (3).

(4) $$I^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\beta} I^{\alpha} f(x)$$

Prueba

Por definición del operador integral fraccionario de Riemann-Liouville

$$(4.1) \qquad I^\alpha(I^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(I^\beta f)(t)dt$$

$$(4.2) \qquad I^\alpha(I^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x \int_0^t (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} f(y)dydt$$

$$(4.3) \qquad I^\alpha(I^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x \int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1} f(y)dtdy$$

Hacemos el cambio de variable $(t - y) = (x - y)z$.

$$(4.4) \; \int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}dt = \int_0^1 (x-y)^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}z^{\beta-1}(x-y)dz$$

Luego, usamos la función Beta.

$$(4.5) \qquad B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Donde, $Re(z_1) > 0$, $Re(z_2) > 0$.

$$(4.6) \qquad \int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}dt = \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dz$$

$$= B(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$(4.7) \qquad I^\alpha(I^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(y)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-y)^{\alpha+\beta-1}dy$$

$$(4.8) \qquad I^\alpha(I^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(y)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-y)^{\beta+\alpha-1}dy$$

$$= I^\beta(I^\alpha f)(x) \blacksquare$$

$$(5) \qquad I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

Prueba

Tenemos de (4.7) lo siguiente:

$$(5.1) \qquad I^\alpha I^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(y)(x-y)^{\alpha+\beta-1}dy$$

$$= I^{\alpha+\beta} f(x) \blacksquare$$

La propiedad (5) nos dice que el operador $I\alpha$ cumple la propiedad de semigrupo.

2.24.7 Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Después de la introducción del operador integral fraccional, es razonable definir también el operador diferencial fraccional. Existen diferentes definiciones, las cuales no coinciden en general. Vamos a presentar dos de estos operadores fraccionarios llamados Riemann Liouville y Caputo.

Nosotros habíamos introducido la notación $I^{\alpha}f\ (x)$ para la integración fraccionaria de una función $f(x)$. Ahora introduciremos una notación similar D^{α} que denotará la derivada fraccional de una función $f(x)$ de un orden arbitrario α simplemente considerando

$D^{-\alpha}f\ (x) = I^{\alpha}f\ (x)$, teniendo cuidado que si reemplazamos $-\alpha$ en (5) tenemos que lidiar con $\Gamma(-\alpha)$, la cual puede divergir.

Sin embargo, esto puede resolverse fácilmente. Primero derivando por derivada ordinaria más que la cantidad necesaria. Haciendo así la diferenciación necesaria restante negativa y luego aplicando la derivada generalizada para completar el resto en la que será una diferenciación negativa.

Definición

Supongamos que $\alpha > 0, t > 0, \alpha, x \in R$ entonces

$$D^{\alpha} f(x) = D^{m} I^{m-\alpha} f(x)$$

Esto es para $m-1 < \alpha < m \in N$, es llamado la derivada fraccional de Riemann- Liouville o el operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville.

Ejemplo de derivada fraccionaria

Supongamos que deseamos saber la derivada fraccional de x^{N} de orden α.Sea $D^{\alpha}f(x) = D^{m}I^{m-\alpha}f(x)$. Vamos a considerar $m=1$, así tenemos $0 < \alpha < 1$ y reemplazando

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}f(x) &= D^{1}[I^{1-\alpha}x^{N}] \\
&= D^{1}[\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-\alpha+1+1)}x^{N-\alpha+1}] \\
&= \frac{(N-\alpha+1)\Gamma(N+1)x^{N-\alpha}}{(N-\alpha+1)\Gamma(N-\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

Así tenemos la siguiente fórmula muy práctica.

$$
D^{\alpha}x^{N} = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-\alpha+1)}x^{N-\alpha}
$$

Que pertenecía a Lacroix, pero ahora es obtenida usando la derivada de Riemann-Liouville.

2.24.8 Propiedades del operador D^{α}

Por convención $D^0 f(x) := f(x)$

Es decir, el operador D^0 es el operador identidad.

Sea $\alpha \in R+$, $\lambda \in C$.

(1) $D^{\alpha}(f+g) = D^{\alpha}f + D^{\alpha}g$

(2) $D^{\alpha}(\lambda f) = \lambda D^{\alpha}f$

De (1) y (2) se demuestra que D^{α} es lineal.

(3) $D^{\alpha}(D^{\beta}) \neq D^{\beta}(D^{\alpha})$

Prueba: Sea, $f(x) = x^{1/2}$, entonces obtenemos las siguientes derivadas fraccionarias.

$$
\begin{aligned}
D^{1/2}x^{1/2} &= \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)}x^{1/2-1/2} \\
&= \frac{1/2}{\Gamma(1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
D^{3/2}x^{1/2} &= \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2-3/2+1)}x^{1/2-3/2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}.x^{-1}}{2\Gamma(0)} = 0
\end{aligned}
$$

Luego se obtiene lo siguiente

$$D^{1/2}(D^{3/2}x^{1/2}) = D^{1/2}(0) = 0.$$

$$D^{3/2}(D^{1/2}x^{1/2}) = D^{3/2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}D^{3/2}1$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}D^{3/2}x^0 = \frac{-x^{-3/2}}{4}\blacksquare$$

(4) $$D^\alpha C = \frac{C.x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Prueba

$$D^\alpha C = D^\alpha x^0 C$$
$$= C\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)}x^{0-\alpha}$$
$$= \frac{Cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\blacksquare$$

2.24.9 Propiedades de I^α y D^α

Ya vimos las propiedades de la derivada e integral fraccionaria de Riemann- Liouville. A continuación, mostraremos como interactúan mediante las siguientes propiedades.

(1) $$D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x)$$

Prueba

Para un m con $m-1 < \alpha < m$ se tiene

$$D^m(I^{m-\alpha}I^\alpha)f(x) = D^m I^m f(x) = f(x)\blacksquare$$

(2) $$D^\alpha I^\beta f(x) = D^{\alpha-\beta}f(x)$$

Prueba

Supongamos que $0 \leq \beta < \alpha$ y considerando para un m con $m - 1 < \alpha < m$

$$D^\alpha I^\beta f(x) = D^m I^{m-\alpha} I^\beta f(x) = D^m I^{\beta-\alpha+m} f(x)$$

Luego, tomando un n con $n-1 < \alpha-\beta < n$, se tiene

$$D^n D^{m-n} I^{n-\alpha+\beta} I^{m-n} f(x) = D^n I^{n-\alpha+\beta} = D^{\alpha-\beta} f(x)$$

Ahora, el otro caso es cuando $0 < \alpha < \beta$ y considerando $I^{-\alpha} = D^{\alpha}$ se obtiene

$$D^{\alpha} I^{\beta} f(x) = D^{\alpha} I^{\alpha} I^{\beta-\alpha} f(x) = I^{\beta-\alpha} f(x) = D^{\alpha-\beta} f(x) \blacksquare$$

(3)
$$D I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha} D f(x) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$$

Prueba

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z) dz$$

Haciendo el cambio de variable $z = t - x^{\lambda}$ y $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Así si z=0 se tiene $x=t^{\alpha}$ y si z=t, entonces x=0 , además $dz= -\lambda x^{x-1} dx$. Reemplazando se tiene.

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t^{\alpha}}^{0} (x^{\lambda})^{\alpha-1} f(t-x^{\lambda})(-\lambda x^{\lambda-1} dx) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t^{\alpha}} \frac{f(t-x^{\lambda})}{\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t^{\alpha}} f(t-x^{\lambda}) dx \end{aligned}$$

Usando regla integral de Leibniz, la cual dice

$$\frac{d}{dt}[\int_0^{b(t)} f(t,x)dx] = f(t,b(t)).b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dx$$

Aplicando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} D I^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [f(t-(t^{\alpha})^{\lambda})(t^{\alpha})' + \int_0^{t^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} f(t-x^{\lambda})dx] \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} f(0)\alpha t^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{t^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} f(t-x^{\lambda})dx \end{aligned}$$

Hagamos un cambio de variable $t - x^{\lambda} = z$ luego si x=0 entonces $z=t$. También, si $x=t^{\alpha}$, entonces z=0, además, $-dz = \lambda x^{\lambda-1} dx$. Reemplazando

$$
\begin{aligned}
DI^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f(0)t^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_t^0 \frac{\partial}{\partial t}f(z)(\frac{-1}{\lambda}x^{1-\lambda})dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f(0)t^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}f(z)\alpha(t-z)^{\alpha-1}dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f(0)t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}f(z)\alpha(t-z)^{\alpha-1}dz \\
&= I^{\alpha}Df(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f(0)t^{\alpha-1} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
(4) \qquad I^{\alpha}D^{\alpha}f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{k}\left(D^{\alpha-j}f(x)\right)\Big|_{x=0}\frac{x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}
$$

Prueba

En α sea $k-1 < \alpha < k \in Z^{+}$, luego

$$
(4.2) \qquad I^{\alpha+1}D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha}D^{k}\left\{I^{k-\alpha}f(t)\right\}dt
$$

Por otro lado, sabemos de la derivada de Grunwald-Letnikov

$$
D^{\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\left(D^{k}f(x)\right)\Big|_{x=0} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}D^{m}f(\tau)d\tau
$$

Donde $m-1 \leq \alpha < m \in Z^{+}$.

$$
\begin{aligned}
(4.3) \qquad & D^{m}I^{m-a}f(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{-a+k}}{\Gamma(-a+k+1)}\left(D^{k}f(x)\right)\Big|_{x=0} \\
& = I^{m-\alpha}D^{m}f(x)
\end{aligned}
$$

Haciendo $\alpha = -1$; $m = \alpha$; $j = \alpha - k$ y como k recorre desde 0 a $m-1$, entonces $j = \alpha - k$ recorre desde $\alpha - 0$ hasta $\alpha - (m-1) = 1$.

$$
(4.4) \qquad I^{\alpha+1}D^{\alpha}f(x) = D^{\alpha}I^{\alpha+1}f(x) - \sum_{j=1}^{m}\frac{x^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+2)}\left(D^{\alpha-j}f(x)\right)\Big|_{x=0}
$$

Reemplazando en (4.1)

$$(4.5) \qquad I^{\alpha}D^{\alpha}f(x) = \frac{d}{dx}\left[D^{\alpha}I^{\alpha+1}f(x) - \sum_{j=1}^{m}\frac{x^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+2)}\left(D^{\alpha-j}f(x)\right)\Big|_{x=0}\right]$$

$$(4.6) \qquad = f(x) - \sum_{j=1}^{k}\left(D^{\alpha-j}f(x)\right)\Big|_{x=0}\frac{x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \blacksquare$$

$$(5) \qquad I^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{-\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=1}^{k}(D^{\beta-j}f(x))|_{x=0}\frac{x^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)}$$

Prueba

$$I^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\beta-\alpha}D^{-\beta}D^{\beta}f(x)$$

$$= D^{-\alpha+\beta}I^{\beta}D^{\beta}f(x)$$

$$= D^{-\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=1}^{k}(D^{\beta-j}f(x))|_{x=0}\frac{x^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)} \blacksquare$$

$$(6) \qquad D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=1}^{k}(D^{\beta-j}f(x))|_{x=0}\frac{x^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}$$

$$(6.1) \qquad D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{n}I^{n-\alpha}D^{\beta}f(x)$$

$$(6.2) \qquad = D^{n}I^{n}I^{-\alpha}D^{\beta}f(x)$$

$$(6.3) \qquad = D^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=1}^{k}(D^{\beta-j}f(x))|_{x=0}\frac{x^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)} \blacksquare$$

$$(7) \qquad \lim_{\alpha\to n} D^{\alpha}f(x) = f^{(n)}(x)$$

2.24.10 Derivada de Caputo

La siguiente aproximación es de Dzerbayshan-Caputo. Actualmente este concepto es introducido independientemente por muchos autores, incluyendo Caputo. Sin embargo, parece que Liouville no vio la diferencia entre este operador y el suyo, pues el solo estaba interesado en los casos cuando estos dos operadores coincidan. Seguiremos la convención de llamarlo sólo Caputo.

Definición: Supongamos que $\alpha > 0$, $x > 0$, α, t $\in$ R el operador fraccional

$$D_{*}^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{m-\alpha-1}D^{m}f(t)dt$$

Es llamado la derivada fraccional de Caputo u operador diferencial fraccional de Caputo de orden α. Este operador es introducido por el matemático italiano Caputo en 1967.

Representación

Si $m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}$ y $f(x)$ es tal que $D_*^\alpha f(x)$ existe, entonces

$$D_*^\alpha f(x) = I^{m-\alpha} D^m f(x)$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x$. Hallar $D^{1/2}$, considerando m = 1, se tiene $0 < \alpha < 1$.

$$D_*^{1/2} x = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{1/2} dt$$

Hacemos $u = (x-t)^{1/2}$, derivando tenemos $-2(x-t)^{1/2}\, du = dt$. Además, si t = 0 se tiene $u = x^{1/2}$ y si $t = x$, se tiene u = 0. Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} D_*^{1/2} x &= \frac{2}{\sqrt{(\pi)}} \int_0^{\sqrt{x}} du \\ &= 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Observación: $I_*^\alpha f(x) = I^\alpha f(x)$

Donde $\alpha > 0$.

La integral coincide para ambos. “La diferencia ocurre para la derivada fraccional” (Kisela, 2008). En general, los dos operadores no coinciden (Ishteva, 2005).

$$D_*^\alpha f(x) \neq D^\alpha f(x)$$

2.24.11 Propiedades del operador D^{α}

Sea α ∈ R+, λ ∈ C.

$$(1) \qquad D_*^{\alpha}(f(x)+g(x)) = D_*^{\alpha} f(x) + D_*^{\alpha} g(x)$$

$$(2) \qquad D_*^{\alpha}(\lambda f(x)) = \lambda f(x)$$

De (1) y (2) el operador de Caputo es lineal.

(3) Si $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n \in \mathbf{N}$.

$$D_*^{\alpha} f(x) = D^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0)$$

Prueba: Consideramos la expansión de Taylor en 0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que

$$R_{n-1} = \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x = I^n f^{(n)} f(x)$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= D^{\alpha}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha} t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^{\alpha} R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^{\alpha} I^n f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + D_*^{\alpha} f(x) \end{aligned}$$

■

$$(4) \qquad D_*^{\alpha} f(x) = D^{\alpha}\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)\Big)$$

Prueba

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$
$$= D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0)$$

$$= D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0)\right)\blacksquare.$$

Sea C una función constante, luego se tiene

$$D_*^\alpha C = 0 \tag{7}$$

Prueba

Es inmediato desde que $D^m C = 0$, $m - 1 < \alpha < m \in N$.

Gracias a la propiedad (4) que relaciona ambos operadores, podemos saber cuándo estos coinciden.

Proposición

Si $f(x)$ es tal que $D^{(s)}f(0) = 0$, donde $s = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, entonces la derivada de Caputo y la de Riemann-Liouville coinciden.

Teorema

Si f es continua y $n \leq 0$, entonces

$$D_*^n I^n f = f \tag{8}$$

Prueba

Sea $\phi = I^n$ se tiene que $D^k\phi(0^+) = 0$. Si $k = 0, 1, 2, \cdots n - 1$, se tiene

$$D_*^n I^n f = D_*^n \phi = D^n \phi = D^n I^n f = f\blacksquare.$$

2.24.12 ¿Por qué usar operador de Caputo?

"Este es el operador de Caputo de orden α que se usó en la solución de problemas prácticos por Caputo. Un típico resultado de ecuaciones diferenciales (clásica o fraccional) es que uno necesita especificar las condiciones iniciales para hacer seguro que la solución es única.

Muchas de estas situaciones de condiciones adicionales describen ciertas propiedades de la solución para el inicio del proceso, es decir, para el punto $x = 0$, entonces tal problema es llamado un problema de valores iniciales".

"Es fácil ver que el número de condiciones iniciales que uno necesita para especificar en orden y para obtener una solución única es m = [α] en particular $0 < \alpha \leq 1$ (el cual es el caso para muchas aplicaciones), nosotros debemos especificar solo una condición. Sin embargo, la forma precisa de esta condición no es arbitraria".

"Cuando las ecuaciones diferenciales son preocupantes, hay una conexión entre el tipo de la condición inicial y el tipo de derivada fraccional. Esta es la razón por la cual se elige la derivada de Caputo y no la de Riemann-Liouville, que es más usada en matemática pura. Para el caso Riemann-Liouville, uno deberá especificar el valor de ciertas propiedades fraccionarias de la solución desconocida para el punto $x = 0$".

"Sin embargo, cuando nosotros tratamos con una aplicación física concreta de desconocida cantidad y, tendrá un cierto significado (por ejemplo, de deslocación), pero esto no es claro para un significado físico de una derivada fraccional. En otras palabras, tampoco el simple dato requerido no será viable en la práctica. Cuando nosotros tratamos con la derivada de Caputo, la situación es diferente. Nosotros podemos especificar el valor inicial $y(0), y'(0) \ldots y^{(m-1)}(0)$, es decir, el valor de la función en sí misma y derivada de orden entero".

"Estos datos tienen buen entendimiento físico y pueden ser medidos. Muchos autores trabajan con Riemann-Liouville, pero trabajan con condiciones iniciales homogéneas. Se sabe que la ecuación con operadores Riemann- Liouville son equivalentes para estos con el operador de Caputo, pero elegimos Caputo porque podemos especificar condiciones no homogéneas" *(Diethelm, Ford and Freed, 2002).*

2.24.13 Teorema del valor medio

Teorema

Supongamos que $f(x) \in C[0,a]$ y $D_*^{\alpha} \in C(0,a]$, para $0 < \alpha \leq 1$. .

Tenemos $$f(x) = f(0^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(D_*^{\alpha} f)(\psi).x^{\alpha}$$

(Odibat and Momani, 2008).

Teorema

Supongamos que $D_*^{n\alpha} f(x), D_*^{(n+1)\alpha} f(x) \in C(0,a]$, para $0 < \alpha \leq 1$, entonces se tiene

$$(I^{n\alpha} D_*^{n\alpha} f)(x) - (I^{(n+1)\alpha} D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}(D_*^{n\alpha} f)(0^+)$$

Donde, $D_*^{n\alpha} = D_*^{\alpha} D_*^{\alpha} \cdots D_*^{\alpha}$ (n veces).

(Trujillo, Rivero and Bonilla,1999)

2.24.14 Generalización de la fórmula de Taylor

Teorema

Supongamos que $D^{k\alpha} f(x) \in C(0, \alpha]$,para $k = 0, 1, \ldots, n + 1$, donde $0 < \alpha \leq 1$ entonces tenemos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{in}}{\Gamma(i\alpha+1)}(D^{i\alpha} f)(0^+) + \frac{(D^{(n+1)\alpha} f)(\psi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} x^{(n+1)\alpha}$$

Donde $0 \leq \psi \leq x$, $\forall x \in (0,a]$

(*Odibat and Momani, 2008*)

2.24.15 Ecuaciones diferenciales fraccionarias

A continuación, veamos la ventaja en una ecuación diferencial fraccionaria de Caputo respecto a una de Riemann-Liouville. Consideremos los siguientes problemas de valores iniciales.

P.V.I. con Riemann-Liouville

$$D^{\alpha}y(t) - \lambda y(t) = 0$$

Donde, $t > 0$ y $n - 1 < \alpha < n$.

$$[D^{\alpha-k-1}y(t)]|_{t=0} = b_k$$

Donde $k = 0,1, \ldots , n - 1$.

P.V.I. con Caputo

$$D^{\alpha}y(t) - \lambda y(t) = 0$$

Donde, $t > 0$ y $n - 1 < \alpha < n$.

$$y^{(k)}(0) = b_k$$

Donde $k = 0,1, 2 , \ldots , n - 1$.

Para el primer caso vemos que la condición que se requiere en la condición inicial está con derivadas fraccionarias. Tales problemas de valores iniciales pueden ser resueltos exitosamente de manera teórica.

Sin embargo, sus soluciones son prácticamente inútiles, porque no hay clara interpretación física de este tipo de condiciones iniciales.

En el segundo caso, donde el operador diferencial es de Caputo, se aplica a condiciones iniciales estándar en términos de derivadas de orden entero que son envueltas.

Estas condiciones iniciales tienen clara interpretación física, como por ejemplo una posición inicial y'(a), aceleración inicial y''(a) y así sucesiva- mente. Por otra parte, la derivada fraccional de Caputo es más restrictiva porque requiere la existencia de la n-ésima derivada de la función. Afortunadamente, la mayoría de funciones que aparecen en las aplicaciones cumplen este requisito.

El P.V.I. de Caputo se resuelve con la transformada de Laplace, donde el procedimiento es simple. Primero, se encuentra la transformada de Laplace; luego, se resuelve para la transformada de la función desconocida y; finalmente, se encuentra la inversa y así se obtiene la solución. Si se desea profundizar en este punto se recomienda consultar la tesis de Kimeu “Fractional calculus: Definition and applications. Master theses (2009)”.

Antes de introducir métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, estudiaremos las ecuaciones diferenciales de Caputo.

Sea el siguiente problema de valores iniciales.

Problema de valor inicial

$$D_*^\alpha f(t) = f(t, y(t)) \ , \ y(0) = y_0$$

Donde, $0 < \alpha \leq 1 \ , \ t > 0$.

Teorema de existencia

Asumimos que $D := [0, x^*]x[y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$ con algún $x^* > 0$ y algún $\delta > 0$ si la función $f : D \to \mathbb{R}$ es continua. Por tanto, definimos

$$X := min\{x^*, (\delta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_{\infty}})^{1/\alpha}\}.$$

Entonces, existe y : [0, *x*] → R que resuelve el P.V.I.

Teorema de unicidad

Asumimos que $D = [0, x^*]x[y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$ con $x^* > 0$ y $\delta > 0$. Por tanto, si la función $f : D \to \mathbb{R}$ es acotada en D y cumple la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable, es decir, $|f(t,a) - f(t,b)| \leq L|a - b|$.

Con L > 0 constante, independiente de t,a y b, entonces denotamos

$$X := min\{x^*, (\delta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_{\infty}})^{1/\alpha}\}.$$

Ahí existe por lo menos una función y : [0, X] → R que resuelve el problema de valores iniciales.

III. MÉTODO

En esta investigación, utilizamos los métodos científicos del tipo cuantitativo, descriptivo, explicativo, para tener una clara y mayor comprensión del algoritmo en relación al modelo logístico de orden fraccional para la interacción de la oferta y demanda. El grado de investigación al que se busca llegar es básica ya que tiene como propósito ampliar los conocimientos científicos a partir de situaciones reales.

El nivel de investigación es explicativo pues tiene como propósito buscar la relación causa efecto. Para el presente proyecto se recopilará la información primero sobre el cálculo fraccional, las propiedades del tipo de derivada de Riemann Liouville y Caputo. Luego estudiar los métodos numéricos fraccionarios, para finalmente programar un algoritmo que permita desarrollar el modelo logístico de orden fraccional para la interacción de oferta y demanda.

IV. RESULTADOS

Con respecto del cálculo fraccional, este ha sufrido dos etapas: desde inicios de 1970 y después de 1970.

En la primera etapa del cálculo fraccional, el objeto de estudio era principalmente las matemáticas como un área abstracta, es decir, solo matemática pura, manipulaciones de poco o sin algún uso.

En la segunda etapa, el paradigma comenzó a cambiar de la matemática pura a aplicaciones en varios campos, tales como procesos de memoria larga y materiales, difusiones anómalas, largo rango de interacción, comportamiento a largo plazo, leyes de potencia, leyes de escalamiento alométricas y, así, debido a las aplicaciones del cálculo fraccional, varios tipos de métodos numéricos tuvieron que aparecer independientemente en periodos.

4.1 Método de Euler generalizado

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, y(t_j))$$

Donde, j = 0, 1, 2, 3, … , k − 1

Claramente, si $\alpha = 1$ obtenemos el método de Euler clásico.

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h.f(t_j, y(t_j))$$

El método de Euler generalizado tiene desarrollado la solución numérica para problemas de valores iniciales con la derivada de Caputo, que considera el siguiente problema de valores iniciales.

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \;,\; y(0) = y_0 \;, 0 < \alpha \leq 1,\; t > 0$$

Además, encontramos la solución en un subintervalo [0, a] subdividido en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ de igual longitud $\boldsymbol{h} = \frac{\alpha - 0}{\boldsymbol{k}}$, usando los nodos $t_j = j.h$.

Con $y(t)$,$D_*^\alpha y(t)$,$D_*^{2\alpha} y(t)$ continuos en $[0, a]$.

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, y(t_j))$$

Donde, $j = 0, 1, 2, ..k - 1$

Prueba

Por conveniencia nosotros subdividimos el intervalo $[0, a]$ en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ de igual longitud $h = a/k$, pero usando los nodos $t_j = jh$ para $j = 0, 1, ..k$. Asumiremos que $y(t)$, $D_*^\alpha y(t)$ y $D_*^{2\alpha} y(t)$ son continuos en $[0, a]$ y usamos la generalización de la fórmula de Taylor para expandir $y(t)$ alrededor de $t = t_0 = 0$. Para cada valor t hay un valor c_1 tal que

$$y(t) = y(t_0) + (D_*^\alpha y(t))(t_0)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(c_1)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

Cuando $(D_*^\alpha y(t))(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ y $h = t_1$ son sustituidos, el resultado es una expresión para $y(t_1)$.

$$y(t_1) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0))\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(c_1)\frac{h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

Si el paso de *h* es elegido pequeño, entonces formamos el término del segundo orden y tenemos

$$y(t_1) = y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_0, y(t_0))$$

El proceso es repetido y generará una secuencia de puntos que aproximan a la solución *y*(*t*).

La fórmula general para el método de Euler es $t_{j+1} = t_j + h$.

4.2 Regla del trapecio generalizado

Consideramos el P.V.I.

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

Donde, $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$.

$$y(t) = I^\alpha f(t, y(t)) + y(0)$$

Sea [0, a] intervalo sobre el cual queremos encontrar solución.

Subdiviremos en k subintervalos $[t_j , t_{j+1}]$ de igual longitud $\boldsymbol{h} = \frac{\alpha - \boldsymbol{0}}{\boldsymbol{k}}$, usando los nodos

$t_j = jh$, donde j = 0, 1, 2, . . . , k − 1.

Regla del trapecio fraccionaria

$$I^\alpha f(t)(a) = ((k-1)^{\alpha+1} - (k-\alpha-1)k^\alpha)\frac{h^\alpha f(0)}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^\alpha f(a)}{\Gamma(\alpha+2)} - \sum_{j=1}^{k-1}((k-j+1)^{\alpha+1} - 2(k-j)^{\alpha+1} + (k-j-1)^{\alpha+1})\frac{h^\alpha f(t_j)}{\Gamma(\alpha+2)}$$

Si $\alpha = 1$

$$I^\alpha f(t)(a) = ((k-1)^{1+1} - (k-1-1)k^1)\frac{h^1 f(0)}{\Gamma(1+2)} + \frac{h^1 f(a)}{\Gamma(1+2)} - \sum_{j=1}^{k-1}((k-j+1)^{1+1} - 2(k-j)^{1+1} + (k-j-1)^{1+1})\frac{h^1 f(t_j)}{\Gamma(1+2)}.$$

Donde

$$*(k-1)^2 - (k-2)k^1 = 1.$$

$$*(k-j+1)^2 - 2(k-j)^2 + (k-j-1)^2 = 0$$

Como $h = \alpha - 0$

$$I^\alpha f(t)(a) = (a-0)\frac{f(0)}{2} + (a-0)\frac{f(a)}{2}$$

$$I^\alpha f(t)(a) = (a-0)[\frac{f(0)+f(a)}{2}]$$

4.3 Un algoritmo para solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias

Presentamos la solución numérica de

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \ , \ y(0) = y(t_0)$$

Este nuevo algoritmo es basado en la modificada regla del trapecio y la generalización del método de Euler. Nuestra aproximación depende de las propiedades analíticas del problema de valores iniciales y este es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = I^\alpha f(t, y(t)) + y(0)$$

A continuación, vamos a presentar el algoritmo que será usado para la solución numérica del algoritmo para demostrar la fórmula de recurrencia de este método.

$$y(t_j) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}((j-1)^{\alpha+1} - (j-\alpha-1)j^\alpha)f(t_0, y(t_0)) + y(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\sum_{i=1}^{j-1}((j-i+1)^{\alpha+1} - 2(j-i)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1})f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}f(t_j, y(t_{j-1}) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t_{j-1}, y(t_{j-1})))$$

Prueba

Sea $[0, \alpha]$ el intervalo sobre el cual queremos encontrar nuestra aproximada solución. Supongamos que el intervalo $[0, \alpha]$ es subdividido en k subintervalos $[t_j , t_{j+1}]$ de igual tamaño $h = a/k$ pero usando los nodos $t_j = jh$ para $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$. Para obtener el punto solución, nosotros debemos reemplazar $t = t_1$ dentro. Así tenemos

$$y(t_1) = (I^\alpha f(t, y(t)))(t_1) + y(0)$$

Ahora, si la modificada regla del trapecio es usada para aproximar $(I^\alpha f\ (t, y(t)))\ (t_1)$ con el paso $h = t_1 - t_0$, entonces el resultado es

$$y(t_1) = \alpha \frac{h^\alpha f(t_0, y(t_0))}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^\alpha f(t_1, y(t_1))}{\Gamma(\alpha+2)} + y(0)$$

Note que esta fórmula en el lado derecho envuelve el término $y(t_1)$, así usamos una estimación para $y(t_1)$. El método fraccional de Euler será suficiente para esto. Sustituimos y se tiene

$$y(t_1) = \alpha . \frac{h^\alpha f(t_0, y(t_0)}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^\alpha f(t_1, y(t_0) + \dfrac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_0, y(t_0))}{\Gamma(\alpha+2)} + y(0)$$

El proceso es repetido para generar una secuencia de puntos que aproximan la solución $y(t)$. Para cada paso, el método fraccional de Euler es usado como un predictor y, entonces, la regla modificada del trapecio es usada para ser un corrector para obtener el valor finito. Así, obtenemos lo pedido.

4.4 El algoritmo para un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias

$$D_*^{\alpha} y_1(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)), \quad y_1(t_0) = y_1(0)$$
$$D_*^{\alpha} y_2(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)), \quad y_2(t_0) = y_2(0)$$

donde $0 < \alpha, \beta < 1$. Usamos el mismo algoritmo anterior y tenemos lo siguiente:

$$y_1(t_j) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}((j-1)^{\alpha+1} - (j-\alpha-1)j^{\alpha}) f(t_0, y_1(t_0)) + y_1(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{i=1}^{j-1}((j-i+1)^{\alpha+1} - 2(j-i)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1}) f(t_i, y_1(t_i)) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_j, y_1(t_{j-1}) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_{j-1}, y_1(t_{j-1})))$$

$$y_2(t_j) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}((j-1)^{\alpha+1} - (j-\alpha-1)j^{\alpha}) f(t_0, y_2(t_0)) + y_2(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{i=1}^{j-1}((j-i+1)^{\alpha+1} - 2(j-i)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1}) f(t_i, y_2(t_i)) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_j, y_2(t_{j-1}) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_{j-1}, y_2(t_{j-1})))$$

(ver [11])

(Mohamed and Mahmoud, 2013)

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 El modelo logístico de orden fraccional para la integración de oferta y demanda

Es gradualmente reconocido que ideas de la teoría dinámica compleja son útiles para economistas y en el mundo de las finanzas. En efecto, alrededor de 1950, Richard Goodwin usó técnicas no lineales en el estudio de dinámica de procesos económicos. Con el progreso de lo investigado en sistemas complejos, algunos conceptos y métodos en dinámica no lineal, tal como estabilidad, bifurcación, catástrofe y caos, etc. Llegan a ser aplicados para problemas económicos y algunos resultados están archivados en la pasada década. Dinámica no lineal llega a ser una importante aproximación para el análisis económico.

Un modelo logístico bidimensional es usado para describir las interacciones y evolución de una potencial oferta y demanda.

El uso de operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario en modelos matemáticos llega a incrementos extendidos en recientes años. Muchas formas de ecuaciones diferenciales fraccionarias llegan a estar propuestas en modelos estándar.

Las ecuaciones diferenciales de orden fraccional llegan a ser el foco de muchos estudios debido a su frecuente aparición en varias aplicaciones en fluidos mecánicos, económicos, viscoelasticidad, biología, física e ingeniería. Recientemente se ha dado un gran aumento de literatura referente a la aplicación de ecuaciones diferenciales fraccionarias en dinámicas no lineales.

Este trabajo estudia el modelo bidimensional del modelo logístico de orden fraccionario para la interacción de la oferta y demanda.

El modelo logístico de orden fraccional que determina la evolución de la potencial demanda y la potencial oferta es dado por

$$D_*^{\alpha} y_1(t) = a y_1 (1 - \frac{c y_1}{2 y_2} - \frac{y_1}{2})$$

$$D_*^{\alpha} y_2(t) = b y_2 (1 - \frac{y_2}{2 c y_1} - \frac{y_2}{2})$$

Donde, a, b ≥ 0; α ∈ (0, 1]; c = $\frac{\boldsymbol{M_d}}{\boldsymbol{M_s}}$.

M_d: subcapacidad de la potencial demanda

M_s: subcapacidad de la potencial oferta.

La demostración de los puntos de equilibrio del sistema dado y la prueba de que el sistema es asintóticamente estable se encuentra desarrollado en el trabajo *The fractional-order logistic model for the interaction of demand and supply* de El-Saka (2012)

Nosotros vamos a desarrollar este sistema usando un nuevo "algoritmo para un sistema de dos ecuaciones", en lugar del método PECE (*Predictor- Evaluate-Corrector-Evaluate*), que es utilizado para dar solución al sistema de oferta y demanda generalizado.

El método PECE es una generalización del clásico método Adams-Bashforth- Moulton.

Sin embargo, nosotros no vamos a utilizar ello, sino vamos a programarlo en el lenguaje de programación Php.

El siguiente pseudocódigo nos ayuda a obtener las soluciones del sistema de oferta y demanda con las condiciones siguientes:

Considerando α ∈ (0, 1], $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $y_1(0) = 0.5$,$y_2(0) = 0.3$, el sistema se convierte en

$$D^{\alpha} y_1 = 2 y_1 (1 - \frac{y_1}{2 y_2} - \frac{y_1}{2}) \ , \ y_1(0) = 0.5$$
$$D^{\alpha} y_2 = 3 y_2 (1 - \frac{y_2}{2 y 1} - \frac{y_2}{2}) \ , \ y_2(0) = 0.3$$

Considerando

$$f(t, y_1(t), y_2(t)) = 2y_1 - \frac{y_1^2}{y_2} - y_1^2$$
$$f(t, y_1(t), y_2(t)) = 3y_2 - 1.5\frac{y_2^2}{y_1} - 1.5y_2^2$$

Utilizaremos para su solución un programa en Php con el siguiente pseudocódigo

5.2 Algoritmo numérico

ALGORITMO NUMÉRICO

CONSTANTES

$\alpha <-0.8$ orden de la derivada

$h <-0.05$ Longitud de paso

$p <-0.0542969$ Constantes del algoritmo

$r <-0.0977344$ Constantes del algoritmo

VAR

Arreglo[] de Real: $y1$

Arreglo[] de Real: $y2$

Entero: j,i// Real: $y11$, $y22$, $f\,1$, $f\,2$, resp1, resp2

INICIO

$y1[0] <-0.5$

$y2[0] <-0.3$

LEER(j)

DESDE $i <-1$ A j HACER

Fórmula de ecuación y 1 falso

$y11 <-y1[i-1] + \mathrm{r} * f\,1(y1[i-1], y2[i-1])$

Fórmula de ecuación y2 falso

$y22 <- y2[i-1] + \mathrm{r} * f\,2(y1[i-1], \mathrm{y}2[i-1]);$

Para $y1$

f 1 = f 1(y1[0], y2[0]);

f 2 = f 1(y11, y22);

resp1 = p $*$ ecuacion (i) $* f1 + y1[0]$ + p $*$ sumatoria$(i, 1) + p * f2$;

$y1[i]$ = resp1;

//Para $y2$

$f\,1 = f\,2(y1[0], y2[0]);$

$f\,2 = f\,2(y11, y22);$

resp2 = $p *$ ecuacion (i) $* f\,1 + y2[0]$ + p $*$ sumatoria $(i, 2)$ + p $* f\,2$;

$y2[i]$ = resp2;

escribir(”$y1(t$”, i, ”) =”,resp1)

escribir(”$y2(t$”, i, ”) =”,resp2)

FIN DESDE

FIN

FUNCION f1(Real: a, Real b) Real

VAR

Real: num

INICIO

num < $-2 * a - ((a^2)/b) - (a^2)$

FIN FUNCION

FUNCION f2(Real: a, Real b) Real

VAR

Real: num

INICIO

num < $-3 * b - 1.5 * ((b^2)/a) - 1.5 * (b^2)$

FIN FUNCION

FUNCIÓN sumatoria(Entero: j, Entero f) Real

VARv Real: sum

INICIO

sum < −0

DESDE $i < -1$ A $j - 1$ HACER

SI $f = 1$ ENTONCES

$a < -f\,1(y1[i], y2[i])$

ELSE

$a < -f\,2(y1[i], y2[i])$

FINSI

$sum < -sum + (((j - i + 1)^{\text{alf a+1}}) - 2 * ((j - i)^{\text{alpha+1}}) + ((j - i - 1^{\text{alpha+1}})) * a$

FIN DESDE

FIN FUNCION

FUNCION ecuación (Real *i*) Real

VAR

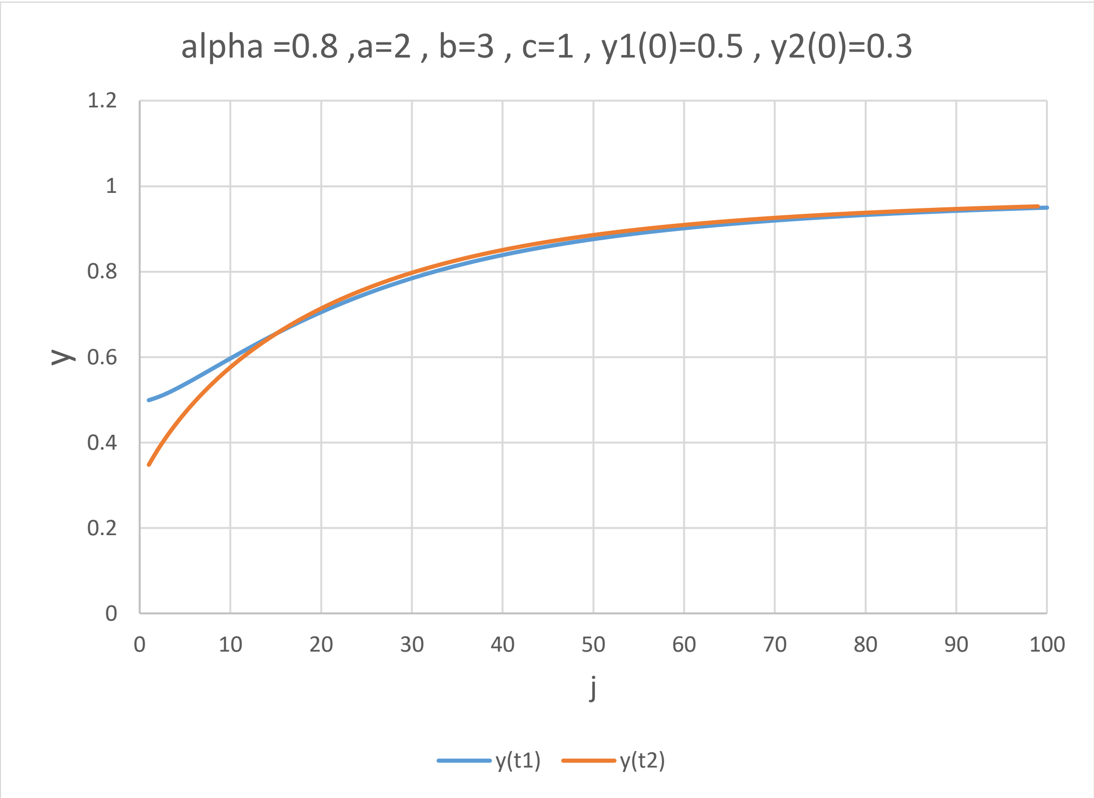
Real: a

INICIO

$a <- ((i-1)^{\text{alpha}+1}) - (i - \text{alpha} - 1) * (i \text{ alpha})$

F IN F U N CION

Al ejecutar nuestro algoritmo, podemos observar que al dar valores desde $j = 1$ hasta $j = 100$ las soluciones se van aproximando hasta el punto de equilibrio. En este caso, según el trabajo de El-Saka (2012) se aproximan al punto de equilibrio igual a 1 para ambos $y_1(t_j), y_2(t_j)$.



El siguiente cuadro muestra los valores de $y_1(t_j), y_2(t_j)$.cuando el j va aumentando.

Si $j = 100$, se tiene los siguientes puntos (ver tabla).

Valores	
$y_1(tj)$	$y_2(tj)$
0.49895208177267	0.34826735339629
0.50613438162178	0.38389116708285
0.51501650092586	0.41539603473125
0.52540793270848	0.44394677281592
0.53664977820522	0.47019300587309
0.5484009661602	0.49448618340029
0.56043095513687	0.51707968325276
0.57258206880951	0.53816819658278
0.58474136295952	0.55791021749809
0.59682579351412	0.57643850762941
0.60877314286485	0.59386625510703
0.62053628496869	0.6102910279454
0.63207937848855	0.62579758393838
0.64337524171253	0.64046000667441
0.65440347890054	0.6543434040597
0.66514910181849	0.66750529507783
0.6756014879742	0.67999675847079
0.6857535744659	0.69186339105967
0.69560122113444	0.70314610973743
0.70514269841537	0.71388182330795
0.7143782691835	0.7241039953325
0.7233098429848	0.73384311558031
0.73194068713716	0.74312709491246
0.74027518332803	0.75198159615207
0.74831862121245	0.7604303115636
0.75607702254081	0.76849519590692
0.76355699079709	0.77619666260471
0.77076558238372	0.78355374933741
0.77771019616896	0.79058425833318
0.78439847879843	0.79730487573164
0.79083824361901	0.80373127364904
0.79703740140995	0.80987819794176
0.80300390138926	0.81575954413701

Table 1: Tabla del $j = 1$ hasta $j = 33$.

Valores	
$y_1(tj\ )$	$y_2(tj\ )$
0.80874568118283	0.82138842356049
0.81427062462197	0.82677722132626
0.81958652638318	0.8319376475528
0.82470106260744	0.83688078292135
0.82962176674193	0.84161711948839
0.8343560099372	0.8461565974977
0.83891098541141	0.85050863880017
0.84329369626161	0.85468217737896
0.84751094626222	0.85868568738632
0.85156933324405	0.86252720902518
0.85547524469443	0.86621437254888
0.85923485526083	0.86975442060368
0.86285412587768	0.87315422909999
0.86633880426948	0.8764203267666
0.86969442661285	0.87955891351631
0.87292632016671	0.88257587773138
0.87603960670334	0.88547681256003
0.87903920659413	0.88826703130231
0.8819298434226	0.89095158195241
0.88471604901359	0.89353526095611
0.88740216878287	0.89602262623468
0.88999236732388	0.89841800952085
0.89249063416035	0.90072552804786
0.89490078960351	0.90294909562841
0.89722649066187	0.90509243315733
0.89947123695916	0.90715907856929
0.90163837662346	0.90915239627978

Table 2: Tabla del $j = 34$ hasta $j = 60$.

Valores	
$y_1(tj)$	$y_2(tj)$
0.90373111211612	0.91107558613677
0.90575250597493	0.91293169190768
0.90770548645024	0.91472360932569
0.90959285301717	0.91645409371751
0.91141728175022	0.91812576723365
0.91318133054987	0.91974112570151
0.91488744421322	0.92130254512017
0.91653795934325	0.92281228781498
0.91813510909272	0.92427250826943
0.91968102774089	0.92568525865037
0.9211777551023	0.9270524940428
0.92262724076808	0.92837607740855
0.92403134818134	0.92965778428366
0.92539185854883	0.93089930722753
0.92671047459182	0.93210226003718
0.92798882413977	0.93326818173861
0.92922846357048	0.93439854036705
0.93043088110111	0.93549473654737
0.93159749993449	0.93655810688499
0.93272968126529	0.93758992717757
0.93382872715092	0.93859141545686
0.9348958832519	0.93956373486993
0.93593234144655	0.94050799640822
0.93693924232502	0.94142526149286
0.93791767756716	0.942316544442353
0.93886869220926	0.94318281469877
0.93979328680412	0.94402499921428
0.94069241947919	0.94484398434579
0.94156700789694	0.94564061792328
0.94241793112217	0.94641571110161
0.94324603140004	0.94717004013383
0.94405211584922	0.94790434805212
0.94483695807381	0.94861934626162
0.945601299698	0.94931571605147
0.94634585182696	0.94999411002795
0.94707129643751	0.95065515347378
0.94777828770194	0.95129944563738
0.94846745324809	0.95192756095638
0.94913939535889	0.95254005021825
0.94979469211425	40.9531374416621

Table 3: Tabla del $j = 61$ hasta $j = 100$.

VI. CONCLUSIONES

1. Sí es posible encontrar un algoritmo que ayude a la solución del modelo logístico para la interacción de oferta y demanda generalizada.
2. Se hizo la construcción numérica para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias tanto para lineales o no lineales.
3. El nuevo algoritmo es obtenido basado en la regla del trapecio y el método de Euler generalizado.
4. La derivada del tipo Caputo tiene ventaja respecto a la de Riemann- Liouville para las aplicaciones en modelos de ecuaciones diferenciales fraccionarias.
5. Las propiedades con la definición de Caputo y Riemann-Liouville son distintas.
6. La derivada de Caputo y la de Riemann-Liouville coinciden solo con un tipo de funciones.
7. No todas las propiedades del Cálculo Fraccional permanecen en el Cálculo Tradicional.

VII. RECOMENDACIONES

1. Se debe tener en cuenta que, al estudiar el cálculo fraccional, la definición de la derivada no es la misma en el campo plenamente matemático que en la matemática aplicada.
2. Los modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que son estudiados de la forma clásica, también pueden ser desarrollados mediante la derivada fraccionaria. Logrando los mismos resultados incluso obteniendo más información relevante.
3. Se debe tener cuidado en las propiedades del cálculo clásico, porque no todas las propiedades cumplen en el cálculo fraccional, como por ejemplo la derivada de una constante ya no es cero, y esta propiedad es importante ya que nos permite armar los modelos en ecuaciones diferenciales.
4. El algoritmo propuesto para la solución numérica de la oferta y demanda, también puede ser usado para solucionar modelos lineales, incluso de forma más simple y eficiente.
5. Hay que tener en cuenta que el gráfico resultante de la aplicación del algoritmo usado para resolver el modelo de la oferta y demanda generalizada, muestra los comportamientos que tienen la oferta y demanda hasta llegar a su punto de equilibrio mas no representa las gráficas del modelo de la oferta y la demanda ampliamente conocida en el ámbito económico.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bhalekar, S., and Daftardar-Gejji, V. (2011) *A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order*. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 1, Nº 5, pp. 1–9.
- Diethelm, K., Ford, N. J., and Freed, A. D. (2002) *A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations*. Nonlinear Dynamics, 29, pp. 1-22.
- EL-SAKA, H. (2012) *The fractional-order logistic model for the interaction of demand and supply*. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 3, Nº 5, pp. 1- 6.
- *Introductory Notes en fractional Calculus*. Noviembre. Recuperado de: http://www.xuru.org/downloads/papers/intrfrac.pdf
- Ishteva, M. (2005) *Properties and applications of the Caputo fractional operator* (PhD thesis). Universitat Karlsruhe, Bulgaria.
- Kimeu, Joseph M., (2009) "*Fractional Calculus: Definitions and Applications*". Masters Theses & Specialist Projects. Paper 115. http://digitalcommons.wku.edu/theses/115
- Kisela, T. (2008). *Fractional differential equations and their applications* (PhD thesis), University of Technology. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/30305949.pdf
- Li, C., and Deng, W. (2007) *Remarks on fractional derivatives*. Applied Mathematics and Computation, Vol.187, pp. 777–784.
- Li, C., Qian, D., and Chen, Y. (2011) *On riemann-liouville and caputo derivatives. Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol 2011, pp. 1-15.
- Li, C.and Zeng F. (2015) Numerical methods for fractional calculus. CRC Press. Mohamed, A., and Mahmoud, R. A. (2013) *An algorithm for the numerical solution of*

systems of fractional differential equations. International Journal of Computer Applications, Vol. 65, Nº 11, pp. 27 – 31.

- Munkhammar, J. (2004) *Riemann-liouville fractional derivatives and the taylor-riemann series*. UUDM project report.
- Odibat, Z. M., and Momani, S. *An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order*. Journal of Applied Mathematics & Informatics 26, 1 2 (2008), 15–27.
- Oldham, K. B., Oldhamm, K. B., and Spainer, J. (1974) *The Fractional Calculus: Theory and applications of Differentiation and Integration to Arbitary Order*. Academic Press, Inc. United states of America.
- Podlubny, I. (1999) *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Mathematics in science and engineering, vol. 198.
- Rida, S., Khalil, M., Hosham, H. A., and Gadellah, S. (2014) *Predator-prey fractional-order dynamical system with both the populations affected by diseases*. Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5, Nº 13, pp. 1-11.
- Sánchez M., J. M. (2011) Historias de matemáticas génesis y desarrollo del cálculo fraccional. G.I.E. Pensamiento matemático, Vol. 1, Nº 1, pp. 1-15.
- Sweilam, N., Nagy, A., Assiri, T., and Ali, N. (2015) *Numerical simulations for variable-order fractional nonlinear delay differential equations*. Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 6, pp. 71-82.
- Trujillo, J., Rivero, M., and Bonilla, B. *On a Riemann–Liouville Generalized Taylor's Formula*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nº 231, pp. 255–265.
- Velasco, M. P. (2008) Modelos diferenciales y funciones especiales en el Ámbito del cálculo fraccionario. Universidad Complutense de Madrid.